世界数学名题欣赏丛书

无处可微的连续函数

刘　　文　著

辽宁教育出版社

1987年·沈阳

无处可微的连续函数

刘 文著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：101,000 开本：787×1092 1/32 印张：5 1/4 插页：4
印数：1—4,430
1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 谭 坚 责任校对：王淑芬
封面设计：安今生

统一书号：7371·345 定价：1.25 元

内容简介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。无处可微的连续函数在数学分析的研究中占有重要地位，它的发现使数学领域发生了划时代的变化，引发了实变函数论等重要数学分支的产生。本书全面地介绍了无处可微连续函数的成因和历史过程，着力阐述了众多数学家对于无处可微连续函数的存在性证明、构造方法和推导过程，从中可体察到他们的思想方法和科研精神。

本书采取历史叙述、夹叙夹议的方法，将离散的数学研究过程联系起来，收到论述生动、深刻的效果。

Summary

This book is one of "a Series of Appreciation of the Famous Mathematical Topics in World". Nowhere dilfferentiable continuous functions are very important in the research of mathematical analysis. The epoch-making change has taken place in mathematics because of their discovery, and some important branches such as the theory fo functions of real variable, etc. have occured.

In this book,the cause of formation and the history of nowhere differentiable continuous functions are introduced in detail. Moreover, the proofs of their existences, ion laws the methods of construction and the reasonning processes studied by many mathematicians are emphasized.

In order that our description is vivid and deep, we connected the discrete processes of the mathematical reseearch by means of historical statements, description and discussion one after another.

世界数学名题欣赏丛书

费马猜想
黎曼猜想
连续统假设
希尔伯特第十问题
欧几里得第五公设
哥德尔不完全性定理
不动点定理
无处可微的连续函数
科克曼女生问题
斐波那契数列
哥德巴赫猜想
置换多项式及其应用
素数判定与大数分解
货郎担问题



作者简介

刘文，1937年1月生于湖南浏阳，1959年毕业于南开大学数学系，现任河北工学院数学教授。著作有《布尔代数》(人民教育出版社，1981)、《数列与极限》（上海教育出版社，1979）、《测度论基础》（辽宁教育出版社，1985）、《不等式启蒙》（与王中烈合著，辽宁教育出版社，1985）、《代数》(第一、二册，河北人民出版社，1981、1983)等，约120万字；译著有《概率论及其应用》（下册，科学出版社，1979），《布尔代数》(与李忠傧合译，科学出版社，1975)等，30余万字；还校订译著四本约100万字；共发表论文七十余篇，约20余万字。主要研究方向为实分析和概率论。

目 录

Contents

一 问题的历史



1. 早期的尝试

连续性与可微性的关系是古典分析中的重要课题．早在牛顿和莱布尼兹的时代，人们就已知道连续性是可微性的必要条件，然而对连续性是否是可微性的充分条件这一问题的认识却经历了一个漫长的过程．

直到十九世纪中叶，人们还把函数的概念和作为动点运动轨道的曲线的几何概念联系在一起．由于动点必须经过它的轨道上任两点之间的每一个点，因此曲线是连续的；又因为动点在它的轨道上的每一点都有确定的运动方向，因此曲线在每一点处都有切线．正是出于这种直观的考虑，当时的数学家相信，连续性是可微性的充分

条件．关于这个问题的早期文献，一般要追溯到1806年安培的论文〔2〕，在这篇文章中，这位学者曾徒劳无功地企图证明任何连续函数除个别点外都是可微的．可是当我们进一步考虑到函数概念的发展时，就可觉察到，安培所考虑的差不多只能是某种分段单调函数．尽管如此，但当时几乎所有的数学家都相信安培的结果，并且在其后数十年的许多教科书中继续出现类似的“证明”，甚至象高斯、柯西和狄利克雷这样杰出的数学家，也从未在其著作中提到他们对此持不同意见，虽然他们并没有公开赞成安培的观点，但他们之中没有一个相信存在处处不可微的连续函数．达布在他1875年出版的关于“间断函数”的报告中提到，当时只有一个人（M．毕内梅）声称他不相信安培的证明．

2．波尔察诺和黎曼的例子

无处可微连续函数的第一个例子是由波尔察诺于1834年在一份手稿中提出的，但他的手稿1920年才被发现．波尔察诺定义的函数并没有解析表达式，而是用一条曲线来表示的．波尔察诺

只是证明了他所构造的函数在定义区间中的一个处处稠密的可列集中的每一点不可微，他不但没有觉察到这个函数具有处处不可微的特性，而且对连续性与可微性的关系持有错误的看法，他在1847年出版的一本著作中认为，除自变量的一些孤立值外，连续函数是处处可微的。波尔察诺函数的无处可微性是后来由K.理赤立克、G.柯瓦列夫斯基与A. N. 辛恩等人证明的，见〔39〕、〔23〕、〔24〕、〔41〕。

黎曼的一些学生声称，黎曼曾于1861年在他的演讲中给出一个用无穷级数表示的函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2\pi x)}{n^2}$$

作为不可微连续函数的例子，但黎曼和他的学生均未发表过这一论断的证明。直到1916年黎曼函数的不可微性才由G.H.哈代加以证明，见〔18〕。

3. 维尔斯特拉斯的发现

第一个公开发表的无处可微连续函数的例子是由维尔斯特拉斯构造的如下函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

其中b是一个奇整数，$0<a<1$，且$ab>1+\frac{3\pi}{2}$.

早在1860年维尔斯特拉斯就发现了这个例子，并在他的多次演讲中提出，但直到1875年才由杜布瓦一雷蒙加以发表（附有维尔斯特拉斯本人的证明）.

维尔斯特拉斯的发现在当时的数学界引起了巨大的轰动，用杜布瓦一雷蒙的话来说，它“不论在直接的知觉或是在批判的理解方面，都同样非常奇妙。”

维尔斯特拉斯的发现不仅最终地结束了想要证明最一般形式的连续函数的可微性的企图，而且开辟了一个新的研究领域——函数不可微性的课题，这一课题对数学家奇妙思维的训练起了重要作用. 自维尔斯特拉斯以来，人们对它的研究延绵至今犹未停止（参见本书所引文献）.

4. 有关维尔斯特拉斯函数的一些工作

自维尔斯特拉斯的结果发表以后，有大量的

论文围绕着维尔斯特拉斯函数的不可微条件进行研究.

维尔斯特拉斯给出的函数

$$\sum a^n \cos(b^n \pi x) \tag{1}$$

不具有有限和无限的导数的条件是

$$0<a<1, \quad ab>1+\frac{3\pi}{2}$$

其中b为奇数.

布朗维茨〔10〕直接改进了维尔斯特拉斯的结果, 他给出的条件是

$$0<a<1, \quad ab>1+\frac{3\pi}{2}(1-a)$$

其中b为奇数.

使（1）不存在有限导数的条件也被给出. 狄尼〔16〕给出的条件是

$$ab\geqslant 1, \quad ab^2>1+3\pi^2$$

勒茨〔25〕给出的条件是

$$ab>1, \quad a^2b^2>1+\pi^2$$

布朗维茨〔10〕给出的条件是

$$ab\geqslant 1, \quad ab^2>1+\frac{3\pi^2}{4}(1-a)$$

所有这些条件中都事先假定 b 为奇数. 但狄尼证

明，如果

$$ab>1+\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1-a}{1-3a},\quad a<\frac{1}{3}$$

或

$$ab\geqslant 1,\quad ab^2>1+15\pi^2\frac{1-a}{5-21a},\quad a<\frac{5}{21}$$

则b为整数的限制可以取消.

最好的结果是哈代〔18〕、〔19〕得到的，他证明当 $0<a<1$，$ab\geqslant 1$时，不论b是否为整数，函数

$$\sum a^n\cos(b^n\pi x)\text{与}\sum a^n\sin(b^n\pi x)$$

都处处不存在有限导数．他还证明，如果去掉“有限”一词，则上述结果不再成立．

5．历史上的一些重要例子

由于其它一些有关问题的缘故，差不多十九世纪末叶和本世纪初叶所有从事数学分析的卓越数学家都曾致力于构造一些新的无处可微连续函数以及阐明它们的性质；下面所举的是历史上的一些重要的例子：

（1）设$0<a<1$，b为奇数，则当

$$ab>1+\frac{3\pi}{2}\text{或}ab>1+\frac{3\pi}{2}(1-a)$$

时，$\sum a^n\cos(b^n\pi x)$ 处处不存在有限和无限的导数。

（维尔斯特拉斯，狄尼，勒茨，布朗维茨）

（2）$\sum\frac{1}{n^2}\sin^2 x$处处不存在有限的导数。

（黎曼，哈代）

（3）设$0<a<1$，$b=4m$（m为正整数），则当$ab>1+\frac{3\pi}{2}$时，$\sum\delta(n)a^n\sin(b^n\pi x)$（$|\delta(n)|=1$）处处不存在有限和无限的导数。

（狄尼，波特）

（4）设$0<a<1$，b为整数，则当 $ab>9$时，$\sum a^n\sin(b^n x)$处处不存在有限和无限的导数。

（波特）

（5）设$0<a<1$，$b=4m+1$（m为整数），则当$ab>1+\frac{3\pi}{2}$时，$\sum a^n\sin(b^n\pi x)$ 处处不存在有限和无限的导数。

（狄尼，克洛普）

（6）设$0<a<1$，$b=4m+3$（m为整数），则当$ab>1+\frac{3\pi}{2}$时，$\sum(-1)^n a^n \sin(b^n \pi x)$处处不存在有限和无限导数。

（克洛普）

（7）设$|a|>1+\frac{3\pi}{2}$，则

$$\sum\frac{a^n}{n!}\sin(n!\pi x),\quad \sum\frac{a^n}{n!}\cos(n!\pi x)$$

处处不存在有限和无限导数。

（波特）

（8）设$|a|>1+\frac{3\pi}{2}$，则

$$\sum\frac{a^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\cos(1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\pi x)$$

处处不存在有限和无限导数。

（达布，狄尼）

（9）设$|a|>1+\frac{3\pi}{2}$，则

$$\sum\frac{a^n}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)}\sin(1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)\pi x)$$

处处不存在有限和无限导数。

（达布，狄尼）

(10) 设$\sum\frac{a^n}{10^n}$表示任一个十进无穷小数，则

$$\sum\frac{a^n}{10^n}\sin(10^{3n}\pi x),\ \sum\frac{a^n}{10^n}\cos(10^{3n}\pi x)$$

处处不存在有限和无限导数。

（波特）

(11) 设$0<a<1$，则

$$\sum a^n\sin(a^n\pi x),\ \sum a^n\cos(a^n\pi x)$$

处处不存在有限导数。

（塞利尔，哈代）

(12) 设 $\psi(x)$ 是周期函数（周期为 1），其中

$$\psi(x)=\begin{cases}x, & \text{当}0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-x, & \text{当}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

又$0<a<1$，$ab>4$，则$\sum a^n\psi(b^n x)$处处不存在有限和无限导数（b为整数）.

（费伯，克洛普）

(13) 设$\varphi(x)$是周期为 2 的函数，其中

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2} \\ x-2, & \text{当 } \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$$

又$0<a<1$，$b=4m+1$（m为整数），且$ab>4$，则$\sum a^n\varphi(b^n x)$处处不存在有限和无限导数。

（克洛普）

（14）设$0<a<1$，$b=4m+3$（m为整数），$ab>4$，则$\sum(-1)^n a^n\varphi(b^n x)$处处不存在有限和无限导数。

（克洛普）

（15）设 $0<a<1$，b 为奇数，且 $ab>1+\frac{3\pi}{2}$，则$\sum a^n|\sin(b^n\pi x)|$ 处处不存在有限和无限导数。

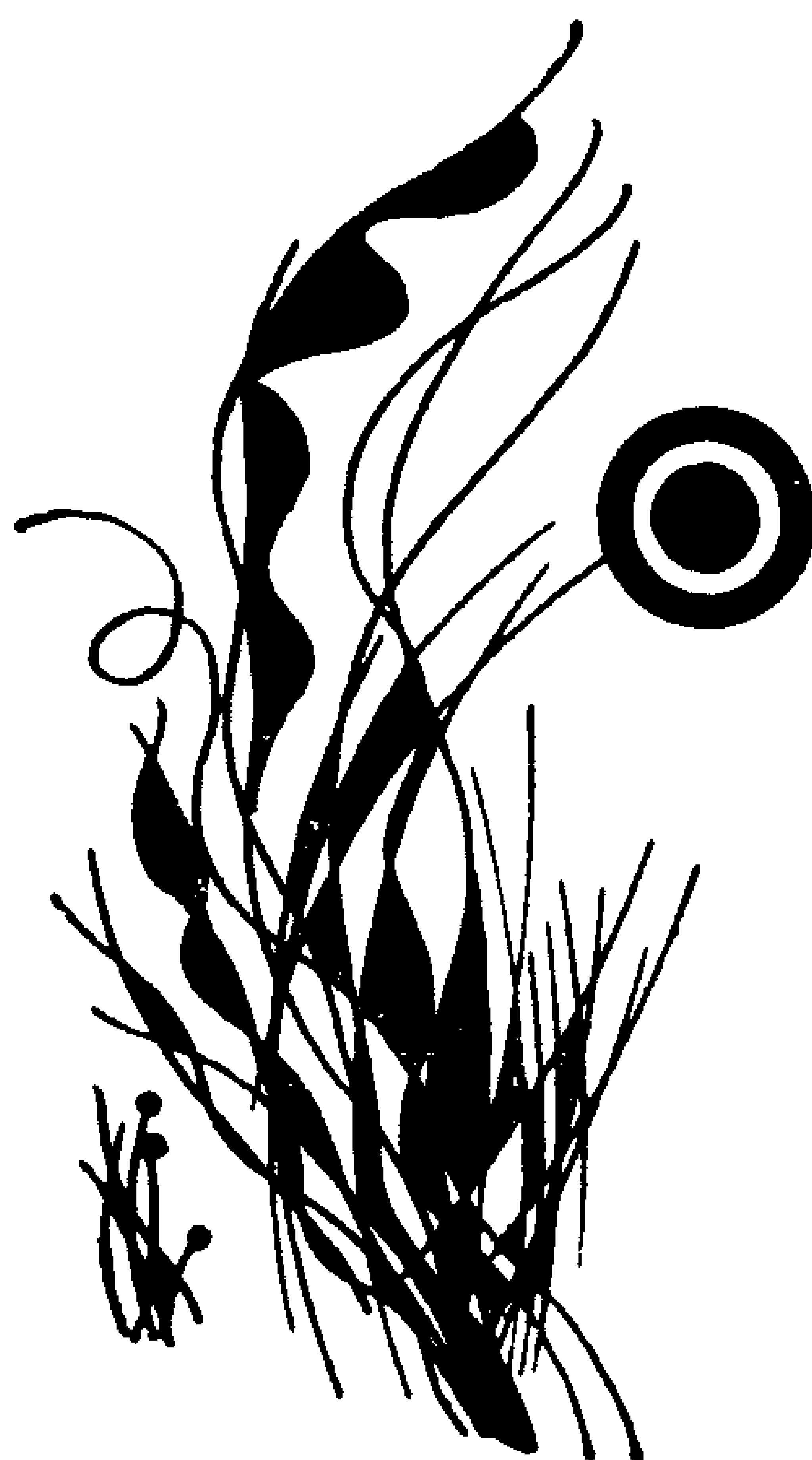
（克洛普）

（16）当$|x|>1+\frac{3\pi}{2}$时，

$$\sum\frac{x^n}{n!}\sin(n!\,\pi x),\ \sum\frac{x^n}{n!}\cos(n!\,\pi x)$$

不存在有限和无限导数。　　　　（勒茨，波特）

二 用级数定义的无处可微连续函数



1. 两个引理

在系统论述无处可微连续函数的构造之前，我们先给出两个引理作为准备，利用它们来证明连续函数的不可微性时，往往比直接按定义证明要简单得多.

引理1 设函数在x_0处具有导数$f'(x_0)$（有限或无限），x_n，x'_n是满足如下条件的两个实数列：

$$x_n \leqslant x_0 \leqslant x'_n,\quad x_n < x'_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x'_n - x_n) = 0$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n} = f'(x_0) \qquad (1)$$

证明 先考虑 $f'(x_0)=A$为有限的情况。任给$\varepsilon>0$,取$\delta>0$,使当$|x-x_0|<\delta$时有

$$|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|<\varepsilon|x-x_0| \quad (2)$$

取正整数N,使当$n>N$时有

$$|x_n-x_0|<\delta,\quad |x'_n-x_0|<\delta$$

则当$n>N$时由（2）有

$$|f(x_n)-f(x_0)-A(x_n-x_0)|<\varepsilon|x_n-x_0|$$

$$|f(x'_n)-f(x_0)-A(x'_n-x_0)|<\varepsilon|x'_n-x_0|$$

从而有

$$|f(x'_n)-f(x_n)-A(x'_n-x_n)|$$
$$\leqslant|f(x'_n)-f(x_0)-A(x'_n-x_0)|+|f(x_n)-f(x_0)-A(x_n-x_0)|$$
$$<\varepsilon|x'_n-x_0|+\varepsilon|x_n-x_0|=\varepsilon(x'_n-x_n)$$

即

$$\left|\frac{f(x'_n)-f(x_n)}{x'_n-x_n}-A\right|<\varepsilon$$

从而（1）成立。

下面考虑$f'(x_0)=+\infty$的情况。此时对于任给的$M>0$,存在$\delta>0$，使得当$0\leqslant x-x_0<\delta$时有

$$f(x)-f(x_0)\geqslant M(x-x_0) \quad (3)$$

当$0<x_0-x<\delta$时有

$$f(x_0)-f(x)\geqslant M(x_0-x) \quad (4)$$

取正整数N,使当$n>N$时有

$$0 \leqslant x'_n - x_0 < \delta, \quad 0 \leqslant x_0 - x_n < \delta$$

于是当$n > N$时由（3）与（4）有

$$f(x'_n) - f(x_0) \geqslant M(x'_n - x_0)$$
$$f(x_0) - f(x_n) \geqslant M(x_0 - x_n)$$

从而有

$$\begin{aligned} f(x'_n) - f(x_n) &= f(x'_n) - f(x_0) + f(x_0) \\ &\quad - f(x_n) \\ &\geqslant M(x'_n - x_0) + M(x_0 - x_n) \\ &= M(x'_n - x_n) \end{aligned}$$

即

$$\frac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n} \geqslant M$$

于是就证明了当$f'(x_0) = +\infty$时（1）成立。 □

同理可证当$f'(x_0) = -\infty$时（1）仍成立。

引理2 设$f(x)$在x_0处具有有限的右导数$f_+'(x_0) = A$，λ是正常数，x_n, x'_n是满足如下条件的两个实数列

$$x_0 \leqslant x_n < x'_n$$
$$x'_n - x_n \geqslant \lambda(x'_n - x_0) \qquad (5)$$
$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x_0$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n} = A \qquad (6)$$

证明 由假设可知，$f(x)$可表为

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),\quad x\geqslant x_0 \tag{7}$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0+0$时无穷小，且$\alpha(x_0)=0$，由（7）有

$$f(x_n)=f(x_0)+A(x_n-x_0)+\alpha(x_n)(x_n-x_0) \tag{8}$$

$$f(x'_n)=f(x_0)+A(x'_n-x_0)+\alpha(x'_n)(x'_n-x_0) \tag{9}$$

由（8）与（9）有

$$\frac{f(x'_n)-f(x_n)}{x'_n-x_n}=A+\frac{1}{x'_n-x_n}[\alpha(x'_n)(x'_n-x_0)-\alpha(x_n)(x_n-x_0)] \tag{10}$$

由（10）与（5）即得（6）. □

注 关于左导数有类似的结论成立。

2. 维尔斯特拉斯结果的证明

根据一致收敛性，维尔斯特拉斯函数的连续性是显然的。下面我们来证明它的不可微性。

定理 设$0<a<1$，b是奇数，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

如果

$$ab>1+\frac{\pi}{2}(1-a) \qquad (1)$$

则$f(x)$处处不存在有限的单侧导数；如果

$$ab>1+\frac{3\pi}{2}(1-a) \qquad (2)$$

则$f(x)$也处处不存在无穷导数（双侧）.

注 条件（1）与（2）均比维尔斯特拉斯原来的条件 $ab>1+\frac{3\pi}{2}$弱.

证明 设x固定. 对于任何正整数n，存在唯一的整数N_n，使得

$$b^{-n}\left(N_n-\frac{1}{2}\right)\leqslant x<b^{-n}\left(N_n+\frac{1}{2}\right)$$

令

$$x_n=b^{-n}\left(N_n+\frac{1}{2}\right),\quad x'_n=b^{-n}(N_n+1)$$

则

$$0<x'_n-x\leqslant\frac{3}{2}b^{-n} \qquad (3)$$

$$x'_n-x_n=\frac{1}{2}b^{-n} \qquad (4)$$

由（3）与（4）有

$$x'_n - x_n \geqslant \frac{1}{3}(x'_n - x)$$

令

$$f(x'_n) - f(x_n) = S_n(x'_n, x_n) + R_n(x'_n, x_n) \qquad (5)$$

其中

$$S_n(x'_n, x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k(\cos b^k \pi x'_n - \cos b^k \pi x_n)$$

$$R_n(x'_n, x_n) = \sum_{k=n}^{\infty} a^k(\cos b^k \pi x'_n - \cos b^k \pi x_n)$$

当$k = n + i$，$i \geqslant 0$时，

$$\cos b^k \pi x_n = \cos b^i \pi \left(N_n + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\cos b^k \pi x'_n = \cos b^i \pi (N_n + 1) = -(-1)^{N_n}$$

于是

$$R_n(x'_n, x_n) = -a^n \sum_{i=0}^{\infty} a^i (-1)^{N_n}$$

$$= -\frac{(-1)^{N_n} a^n}{1 - a} \qquad (6)$$

对于$S_n(x'_n, x_n)$中的项，利用不等式

$$|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$$

及（4）得

$$|S_n(x'_n, x_n)| \leqslant \frac{\pi}{2}b^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}(ab)^k$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}b^{-n}\cdot\frac{(ab)^n-1}{ab-1} < \frac{\pi a^n}{2(ab-1)}$$

（7）

由（5）—（7）有

$$|f(x'_n)-f(x_n)| > \left(\frac{1}{1-a}-\frac{\pi}{2(ab-1)}\right)a^n$$

$$=\lambda a^n \qquad (8)$$

其中

$$\lambda=\frac{1}{1-a}-\frac{\pi}{2(ab-1)}>0$$

由（3）与（7）有

$$\left|\frac{f(x'_n)-f(x_n)}{x'_n-x_n}\right| > 2\lambda(ab)^n \qquad (9)$$

由$ab>1$，故由（9）有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x'_n)-f(x_n)}{x'_n-x_n}\right| = \infty$$

于是由引理2知，f在x处不可能存在有限的右导数。

同理可证$f(x)$也不可能存在有限的左导数。

以下证明当（2）成立时$f(x)$也不存在无穷导数。令$\zeta'_n=b^{-n}(N_n-1)$，则$\zeta'_n<x<x_n$，且

$$x_n-\zeta'_n=\frac{3}{2}b^{-n} \tag{10}$$

类似有

$$f(x_n)-f(\zeta'_n)=S_n(x_n,\zeta'_n)+R_n(x_n,\zeta'_n) \tag{11}$$

$$R_n(x_n,\zeta'_n)=\frac{(-1)N_na^n}{1-a} \tag{12}$$

$$|S_n(x_n,\zeta'_n)|<\frac{3\pi a^n}{2(ab-1)} \tag{13}$$

由（11）—（13）有

$$(-1)^{N_n}[f(x_n)-f(\zeta'_n)]=\frac{a^n}{1-a}$$

$$+(-1)^{N_n}S_n(x_n,\zeta'_n)$$

$$>\frac{a^n}{1-a}-|S_n(x_n,\zeta'_n)|$$

$$>\frac{a^n}{1-a}-\frac{3\pi a^n}{2(ab-1)}=ra^n \tag{14}$$

其中由（2）有

$$r=\frac{1}{1-a}-\frac{3\pi}{2(ab-1)}>0$$

由（10）及（14）有

$$\frac{(-1)^{N_n}[f(x_n)-f(\zeta'_n)]}{x_n-\zeta'_n}>\frac{2}{3}r(ab)^n \tag{15}$$

由于$ab>1$，故由（15）有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{N_n}[f(x_n)-f(\zeta'_n)]}{x_n-\zeta'_n}=+\infty \tag{16}$$

令$\zeta_n=b^{-n}\left(N_n-\frac{1}{2}\right)$，则$\zeta_n\leqslant x<x'_n$ 同理可证

$$\frac{-(-1)^{N_n}[f(x'_n)-f(\zeta_n)]}{x'_n-\zeta_n}>\frac{2}{3}r(ab)^n$$

由此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{N_n}[f(x'_n)-f(\zeta_n)]}{x'_n-\zeta_n}=-\infty \tag{17}$$

由（16）与（17）知，如果$\{N_n\}$中含有无穷多个偶数，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)-f(\zeta'_n)}{x_n-\zeta'_n}=+\infty \tag{18}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x'_n)-f(\zeta_n)}{x'_n-\zeta_n}=-\infty \tag{19}$$

如果$\{N_n\}$含有无穷多个奇数，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)-f(\zeta'_n)}{x_n-\zeta'_n}=-\infty \tag{20}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x'_n)-f(\zeta_n)}{x'_n-\zeta_n}=+\infty \tag{21}$$

由(18)—(21)及引理 1 知，f在x处不可能存在无穷（具有确定的符号）导数。

3. 凡德瓦尔登的例子

无处可微连续函数的另一个著名例子是凡德瓦尔登于1930年提出的，这个例子实质上是根据与维尔斯特拉斯的例子相同的想法而作出的，只是把振动曲线$y=\cos\pi x$改为振动折线。

设

$$\varphi(x)=|x|,\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

并通过规定

$$\varphi(x+2)=\varphi(x)$$

把φ的定义域扩张到所有实数，扩张后的函数$\varphi(x)$可以看成是x与最接近的偶数之差的绝对值，显然它是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数。令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\varphi(4^{n}x) \qquad (1)$$

由于$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，故由一致收敛性知，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续。

下面我们来证明$f(x)$处处不存在有限的单侧导数。设x固定。对于任何正整数n，存在唯一的整数N_n，使得

$$N_n-1\leqslant 4^n x<N_n$$

令

$$x_n=4^{-n}N_n,\quad x'_n=4^{-n}(N_n+1)$$

考虑数 $4^k x_n$与$4^k x'_n$，其中k为非负整数。当$k>n$时，它们的差为偶数；当 $k=n$ 时，它们都是整数，差为 1；当$k<n$时，在它们之间没有整数，且其差为4^{k-n}。由于φ是以 2 为周期的 函 数，且在相邻两个整数之间的图形为斜率的绝对值等于 1 的直线段，故有

$$|\varphi(4^k x'_n)-\varphi(4^k x_n)|=\begin{cases}0, & \text{当}k>n,\\ 4^{k-n}, & \text{当}k\leqslant n.\end{cases} \tag{2}$$

由（1）与（2）有

$$f(x'_n)-f(x_n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k[\varphi(4^k x'_n)-\varphi(4^k x_n)]$$

$$|f(x'_n)-f(x_n)|\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k 4^{k-n}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

由此有

$$\left|\frac{f(x'_n)-f(x_n)}{x'_n-x_n}\right|>\frac{1}{2}3^n \qquad (3)$$

由于$x<x_n<x'_n$，当$n\to\infty$时$x'_n\to x$，且

$$x'_n-x_n=4^{-n}>\frac{1}{2}(x'_n-x_n)$$

故由引理 2 知，（3）表明f在x处不存在有限右导数。同理可证f不存在有限的左导数。 □

4．一般情况

维尔斯特拉斯和凡德瓦尔登的例子都是通过一致收敛的函数项级数来表示的，这种构造无处可微连续函数的方法可以推广到如下一般情况：

定理 设$\varphi(x)$是满足常数为A的李普希兹条件的有界函数，l与λ是正数，b是大于 1 的整数，$\sum a_n$是一绝对收敛级数，$\{p_n\}$是正整数列，$b_n=p_1p_2\cdots p_n$。如果

1° 有无穷多个n使p_n能被b整除（记这种n的全体为E）；

2° 对一切整数k有

$$\varphi(kl)=a \qquad (1)$$

$$\left|\varphi\left(kl+\frac{l}{b}\right)-\varphi(kl)\right|\geqslant\lambda \tag{2}$$

3° 存在$\delta>\frac{lA}{b\lambda}$,使当$n$充分大时有

$$|a_nb_n|\geqslant\delta\sum_{k=1}^{n-1}|a_kb_k| \tag{3}$$

则

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(b_nx) \tag{4}$$

是无处单侧可微（即处处不存在有限的单侧导数）的连续函数。

证明 由于φ是有界连续函数，故（4）一致收敛，因而$f(x)$连续．下面我们来证明$f(x)$处处不存在有限的右导数．

设$\lambda_n=\frac{l}{b_n}$。取定x，对于任何正整数n，存在唯一的整数N_n,使

$$(N_n-1)\lambda_n\leqslant x<N_n\lambda_n \tag{5}$$

令

$$x_n=N_n\lambda_n,\quad x'_n=\left(N_n+\frac{1}{b}\right)\lambda_n \tag{6}$$

则有

$$x'_n - x_n = \frac{\lambda_n}{b} \qquad (7)$$

由李普希兹条件知当$k<n$时有

$$|\varphi(b_k x'_n) - \varphi(b_k x_n)| \leqslant \frac{A b_k \lambda_n}{b} \qquad (8)$$

又由（1）与（2）有

$$|\varphi(b_n x'_n) - \varphi(b_n x_n)| \geqslant \lambda \qquad (9)$$

当$k \geqslant n+1$时$b_k x_n$是l的整倍数，当$k \geqslant n+1$且$n+1 \in E$（即p_{n+1}能被b整除）时$b_k x'_n$也是l的整倍数，于是由（1）有

$$\varphi(b_k x'_n) - \varphi(b_k x_n) = 0 \qquad (10)$$

由（8）—（10）当$n+1 \in E$时有

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geqslant \lambda |a_n| - \frac{A\lambda_n}{b}\sum_{k=1}^{n-1}|a_k b_k| \qquad (11)$$

由（3），（7）及（11）当$n+1 \in E$且n充分大时有

$$\left|\frac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n}\right| \geqslant \frac{\lambda b |a_n b_n|}{l} - A\sum_{k=1}^{n-1}|a_k b_k|$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda b \delta}{l} - A\right)\sum_{k=1}^{n-1}|a_k b_k|$$

$$=\sigma\sum_{k=1}^{n-1}|a_kb_k| \qquad (12)$$

其中$\sigma=\dfrac{\lambda b\delta}{l}-A>0$。由（12）及（3）显然有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n+1\in E}}\left|\frac{f(x'_n)-f(x_n)}{x'_n-x_n}\right|=+\infty \qquad (13)$$

由（5）—（7）知，$x<x_n<x'_n$，当$n\to\infty$时$x'_n\to x$，且

$$x'_n-x_n=\frac{\lambda_n}{b}\geqslant\frac{x'_n-x}{b+1}$$

故由引理2知，（13）表明f在x处不存在有限的右导数。

同理可证f不存在有限的左导数。 □

注 条件3°成立的一个充分条件是

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\right|=r>\frac{lA}{b\lambda}+1 \qquad (14)$$

证明 由斯托兹定理及(14)有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_nb_n|}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}|a_kb_k|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_nb_n|-|a_{n-1}b_{n-1}|}{|a_{n-1}b_{n-1}|}$$

$$=r-1>\frac{lA}{b\lambda} \qquad (15)$$

由(15)知，存在$\varepsilon>0$，使当n充分大时有

$$|a_n b_n| > \left(\frac{lA}{b\lambda} + \varepsilon\right) \sum_{k=1}^{n-1} |a_k b_k|$$

取$\delta = \dfrac{lA}{b\lambda} + \varepsilon$即得（3）。

由以上的定理并应用注中的充分条件易证以下各例中的函数都是单侧无处可微函数。

例 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \sin(b^n x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} \sin(b^n x)$，

其中$a>1$为实数，b为大于 2 的整数。

例 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin(b^n x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n \sin(b^n x)$，

其中$0<a<1$，b为正整数，且$ab> \frac{\pi}{2} + 1$。

例 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \cos(b^n x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} \cos(b^n x)$，

其中$a>1$为实数，b为大于 1 的整数。

对于以上三例在验证条件（14）时，可分别应用不等式

$$\sin\frac{\pi}{b} \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{b} = \frac{2}{b} \quad (b \geqslant 2)$$

$$1 - \cos\frac{2\pi}{b} = 2\sin^2\frac{\pi}{b} \geqslant \frac{8}{b^2} \quad (b \geqslant 2)$$

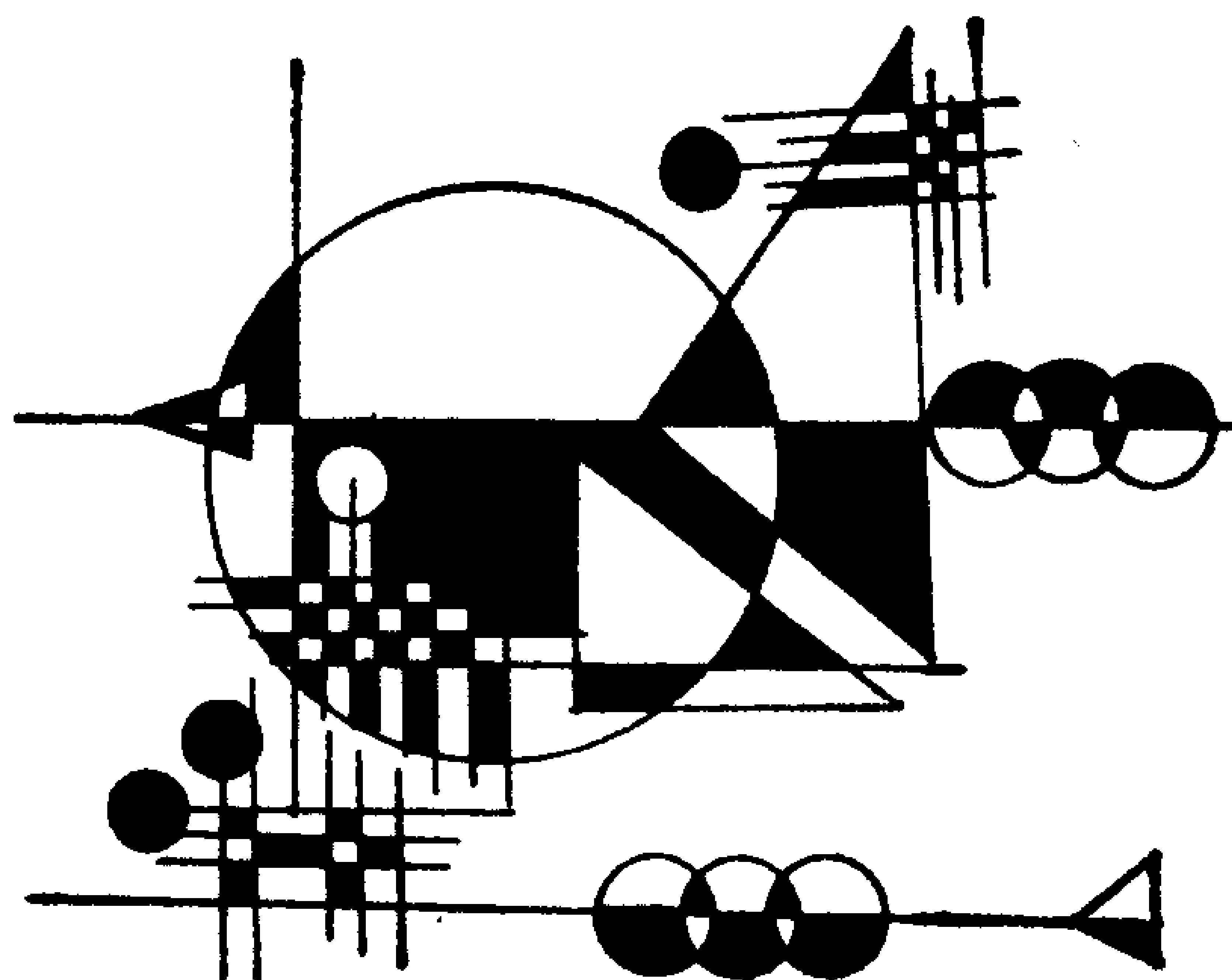
例 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}\varphi(b^{n}x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{a}}\varphi(b^{n}x)$，

其中$\varphi(x)$为x与最接近的整数之差 的 绝 对 值，$a>1$为实数，b为大于 2 的整数.

例 5 $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}\varphi(b^{n}x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a^{n}\varphi(b^{n}x)$，

其中$\varphi(x)$同例5，$0<a<1$，b 为整数，且$ab>2$。

三 用小数定义的无处可微连续函数



1．布什的优美例子

迄今为止最为简单和初等的无处可微连续函数的例子是1952年美国数学家布 什 提 出 的（见〔12〕）．布什的优美例子是利用实数的小数展式来定义的：设b为大于 1 的整数，x是〔0，1〕中的实数，其b进位小数表示为

$$x = 0.x_1x_2\cdots x_k\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{b^k},\ x_k = 0, 1, \cdots, b-1 \qquad (1)$$

利用二进小数定义函数$u = f(x)$如下

$$u = 0.u_1u_2\cdots u_k\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^k};\ u_k = 0, 1 \qquad (2)$$

其中

$$u_1 = 1 \qquad (3)$$

当$k \geqslant 1$时

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_k, & \text{如果} x_{k+1} = x_k \\ 1 - u_k, & \text{如果} x_{k+1} \neq x_k \end{cases} \qquad (4)$$

易知，尽管某些x有两种b进小数表示法，但按（2）—（4）定义的函数$f(x)$是唯一确定的。事实上，设

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{b^k}(x_n > 0,\ \ x_{n+k} = 0) \qquad (5)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{b^k} + \frac{x_n - 1}{b^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b-1}{b^k} \qquad (6)$$

是x的两种b进小数表示，由于（3）中u_k之值仅依赖于（1）式的前k位小数，故当x分别由（5）与（6）表示时，$f(x)$之值分别为

$$u = \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1 - u_n}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}$$

$$u' = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{2^k} + \frac{u'_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1-u'_n}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}$$

下面我们来证明：

1）$f(x)$是连续函数。

设$x\in[0, 1)$，且x与$f(x)$分别由（1）与（2）表示。我们约定，如果x有两种b进位小数表示法，则（1）取从某位起x_k恒为0的形式。任给$\varepsilon>0$，取正整数n充分大，使得$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，

令

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^k}$$

则当$x<x'<x^*$时其b进小数表示为

$$x' = 0.x_1\cdots x_n x'_{n+1} x'_{n+2}\cdots \qquad (7)$$

令

$$f(x') = 0.u_1'u_2'\cdots u_k'\cdots \text{（二进小数）}$$

因为u_k'仅依赖于（7）的前k位小数，故有

$$u_k' = u_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

是于

$$|f(x')-f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

故f在x处右连续.

同理可证f在[0,1]中左连续. □

2）当$b>2$时$f(x)$处处不可微.

设x与$f(x)$分别由（1）与（2）表示. 取$x^{(n)}\in[0,1]$, 设其b进位小数表示为

$$x^{(n)}=0.x_1\cdots x_nx'_{n+1}x'_{n+2}\cdots \qquad (8)$$

其中如果$u_{n+1}=u_n$, 则取$x'_{n+1}\neq x_n$, 如果$u_{n+1}=1-u_n$, 则取$x'_{n+1}=x_n$; 如果$u_{n+2}=u_{n+1}$, 则取$x'_{n+2}\neq x'_{n+1}$, 如果$u_{n+2}=1-u_{n+1}$, 则取$x'_{n+2}\neq x'_{n+1}$, 如果$u_{n+2}=1-u_{n+1}$, 则取$x'_{n+2}=x'_{n+1}$; 当$k>n+2$时, x'_k任意. 设

$$f(x^{(n)})=0.u_1'u_2'\cdots u'_k\cdots \quad (\text{二进位})$$

则由定义有

$$u_k'=u_k,\ 1\leqslant k\leqslant n$$

$$u'_{n+1}=1-u_{n+1},\ u'_{n+2}=u_{n+2}$$

由此有

$$|f(x^{(n)})-f(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{u'_k-u_k}{2^k}\right|\geqslant\frac{1}{2^{n+2}} \qquad (9)$$

而由（1）与（8）有

$$|x^{(n)} - x| \leqslant \frac{1}{b^n} \tag{10}$$

由(9)与(10)得

$$\left|\frac{f(x^{(n)}) - f(x)}{x^{(n)} - x}\right| \geqslant \frac{b^n}{2^{n+2}}$$

由此当$b>2$时有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x^{(n)}) - f(x)}{x^{(n)} - x}\right| = +\infty$$

故f不存在有限的导数。 □

2. 布什方法的初步推广

布什提出的利用小数构造无处可微连续函数的方法新颖而巧妙，它是后来刘文、斯威夫特等的一系列工作的生长点（参见〔49〕—〔54〕及〔47〕）本节中我们给出这个方法的一个初步推广.

设b为大于1的整数，$x\in〔0,1〕$，其b进位小数表示为

$$x = 0.x_1x_2\cdots x_k\cdots;\quad x_k = 0,1,\cdots,b-1 \tag{1}$$

利用二进小数定义函数$u=f(x)$如下：

$$u=0.u_1u_2\cdots u_k\cdots;\ u_k=0,1 \qquad (2)$$

其中u_k是$x_1,x_2,\cdots,x_k$的任一函数：

$$u_k=h_k(x_1,\cdots,x_k) \qquad (3)$$

（即u_k的值仅依赖于（1）的前k 位小数），且当$k>1$时，u_k（即函数h_k)满足如下条件：

$$u_k=\begin{cases}u_{k-1}, & \text{当}x_k=x_{k-1}=0\text{或}b-1\\ 1-u_{k-1}, & \text{当}x_k=0\text{或}b-1,\ \text{且}x_k\neq x_{k-1}\end{cases} \qquad (4)$$

和上节的情况类似，由（4）可知，尽管某些x有两种b进位小数表示法，但以上定义的函数$f(x)$是唯一确定的．同样由（3）可证$f(x)$是一连续函数．

下面我们要证明当$b\geqslant3$时，$f(x)$处处不存在有限的单侧导数。

设$x\in[0,1)$，且x与$f(x)$分别由（1）与（2）表示．我们约定，如果x有两种b进位小数表示法，则（1）取从某位起x_k恒为0的形式．于是存在任意大的正整数n，使$x_n<b-1$。设

$$x^{(n)}=0.x_1'x_2'\cdots x_k'\cdots \quad (b\text{进位})$$

$$f(x^{(n)})=0.u_1'u_2'\cdots u_k'\cdots \quad (\text{二进位})$$

其中

$$x_k' = x_k,\quad 1 \leqslant k < n$$

$$x_n' = b - 1;$$

$$x'_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{当} u_{n+1} = u_n \\ b-1, & \text{当} n_{n+1} = 1 - u_n \end{cases}$$

$$x'_{n+2} = \begin{cases} x'_{n+1}, & \text{当} u_{n+2} = u'_{n+1} \\ b-1-x'_{n+1}, & \text{当} u_{n+2} = 1 - u'_{n+1} \end{cases}$$

当$k > n+2$时，x'_k任意．由于当$x^{(n)}$的前$n+1$位小数确定后，u'_{n+1}即被确定，故上述规定x'_{n+2}的方法是合理的。由定义知，当$1 \leqslant k < n$时，$u'_k = u_k$；如果$u_n' = 1 - u_n$，则$u'_{n+1} = u_{n+1}$；如果$u'_n = u_n$，则$u'_{n+1} = 1 - u_{n+1}$而$u'_{n+2} = u_{n+2}$，故不论何种情况恒有

$$|f(x^{(n)}) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n+2}}$$

而$0 < x' - x \leqslant \frac{1}{b^{n-1}}$，于是

$$\left|\frac{f(x^{(n)}) - f(x)}{x^{(n)} - x}\right| \geqslant \frac{b^{n-1}}{2^{n+2}} \to \infty \quad (\text{当} n \to \infty)$$

由于n可以任意大，故由上式知$f(x)$不存在有限的右导数。

同理可证$f(x)$在(0，1]中处处不存在有限的左导数。

3. 仅使用二进小数的构造方法

布什的方法同时使用了二进小数和b进小数，下面我们给出一种仅使用二进小数的构造方法.

设$x\in[0,1]$，其二进小数表示为

$$x=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots,\quad x_k=0,1 \tag{1}$$

利用二进小数定义函数$u=f(x)$如下：

$$u=0.u_1u_2\cdots u_k\cdots,\quad u_k=0,1 \tag{2}$$

其中

$$u_1=1$$

当$k>$时，

$$u_k=\begin{cases}u_{k-1}, & \text{如果}(x_{2k-1},x_{2k})=(x_{2k-3},x_{2k-2})\\ 1-u_{k-1}, & \text{如果}(x_{2k-1},x_{2k})\neq(x_{2k-3},x_{2k-2})\end{cases} \tag{3}$$

易知，尽管某些x有两种二进小数表示，但按上述规定所定义的函数$f(x)$是唯一确定的。事实上，设

$$x=0.x_1\cdots x_{2n}\ 1000\cdots \tag{4}$$

$$=0.x_1\cdots x_{2n}\ 0111\cdots \tag{5}$$

是x的两种二进小数表示，由于（2）中u_k之值

仅依赖于（1）式的前2k位小数，故当x分别由（4）与（5）表示时，$f(x)$之值分别为

$$u=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k}+\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-u_{n+1}}{2^{n+k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$u'=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k}+\frac{u'_{n+1}}{2^{n+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-u'_{n+1}}{2^{n+k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

故有$u=u'$. 同理可证，当x的两种二进小数表示为

$$x=0.x_1\cdots x_{2n+1}1000\cdots$$
$$=0.x_1\cdots x_{2n+1}0111\cdots$$

时仍然有$u=u'$.

为确定起见，我们约定，如果x有两种二进小数表示，则（1）取从某位起x_k恒为0的形式．本节中所使用的小数均为二进小数，我们不再一一声明．

下面我们来证明：

1）$f(x)$是连续函数．

设$x\in[0,1)$，且x与$f(x)$分别由（1）与

（2）表示。任给 $\varepsilon>0$，取正整数n充分大，使得$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$。令

$$x^* = 0.x_1\cdots x_{2n}111\cdots$$

则当$x<x'<x^*$时有

$$x' = 0.x_1\cdots x_{2n}x'_{2n+1}x'_{2n+2}x'_{2n+3}\cdots$$

令

$$f(x') = 0.u_1'u_2'\cdots u'_k\cdots$$

因为u'_k仅依赖于x'的前$2k$位小数，故有

$$u_k' = u_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

于是

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

故f在x处右连续。

同理可证f在$(0,1]$中左连续。

2）$f(x)$处处不存在有限单侧导数。

设$x\in[0,1)$，且x与 $f(x)$分别由（1）与（2）表示。根据前面的约定，存在任意大的正整数m，使得$x_m=0$，设$2n<m\leqslant 2(n+1)$，并令

$$x' = 0.x_1'x_2'\cdots x_k'\cdots$$

$$f(x') = 0.u_1'u_2'\cdots u_k'\cdots$$

其中

$$x_k' = x_k,\quad 当 1\leqslant k<m;$$

$$x'_m=1,$$

$$x'_k=x_k,\quad 当2n<k\leqslant 2(n+1)且k\neq m;$$

$$x'_k=\begin{cases}0, & 当2(n+1)<k\leqslant 2(n+2)\\ 1, & 当2(n+2)<k\leqslant 2(n+3)\\ & 且u_{n+3}=u'_{n+2}\\ 0, & 当2(n+2)<k\leqslant 2(n+3)\\ & 且u_{n+3}=1-u'_{n+2}\\ x'_{2(n+3)}, & 当2(n+3)<k\leqslant 2(n+3)\\ & 且u_{n+4}=u'_{n+3}\\ 1-x'_{2(n+3)}, & 当2(n+3)<k\leqslant 2(n+4)\\ & 且u_{n+4}=1-u'_{n+3}\end{cases}$$

对于所有其它情况，x_k'任意。由于u_k'仅依赖于（6）的前2k位小数，故上述归纳地定义x_k'的方法是合理的。由（3）显然有

$$u'_{n+3}=1-u_{n+3},\quad u'_{n+4}=u_{n+4}$$

故有

$$|f(x')-f(x)|\geqslant\frac{1}{2^{n+4}}$$

另一方面我们有

$$0<x'-x<\frac{1}{2^{2n}}$$

于是有

$$\frac{|f(x')-f(x)|}{x'-x}>\frac{2^{2n}}{2^{n+4}}=2^{n-4} \qquad (7)$$

由于n可以任意大，故由（7）知f在x处不具有有限的右导数。

同理可证f在$(0,1]$中不具有有限的左导数。

4. 一类连续函数的构造

下面我们推广以上三节中的方法来构造一类相当广泛的连续函数，只要对它稍加限制就可得到无处可微的连续函数。

设$b\geqslant 2$为整数，$x\in[0,1]$，其b进小数表示为

$$x=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots,\quad x_k=0,1,\cdots,b-1;\tag{1}$$

又设$\{n_k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$是任一严格递增的整数列，其中$n_0=0$. 利用二进小数定义函数$u=\varphi(x)$如下：

$$u=0.u_1u_2\cdots u_k\cdots,\quad u_k=0,1\tag{2}$$

其中

$$u_1=g_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})$$

是各变元都在$\{0,1,\cdots,b-1\}$中取值而值域为$\{0,1\}$的任意n_1元函数。当$k>1$时，u_k按如下方式归纳地定义：

1°如果$x_i(n_{k-1}<i\leqslant n_k)$同时为0或同时为$b-1$，则令

$$u_k = u_{k-1}$$

2°如果$x_i(n_{k-1}<i\leqslant n_k)$同时为0或同时为$b-1$，而$x_j(n_{k-2}<j\leqslant n_{k-1})$中至少有一个不等于$x_{n_k}$，则令

$$u_k = 1 - u_{k-1}$$

3°如果$x_i(n_{k-1}<i\leqslant n_k)$不同时为0也不同时为$b-1$，则令

$$u_k = g_k(x_1, x_2, \cdots, x_{n_k})$$

其中g_k是各变元都在$\{0, 1, \cdots, b-1\}$中取值而值域为$\{0, 1\}$的任意n_k元函数。

易知，这样定义的u_k仅依赖于x的b进小数表示式中的前n_k位数字，即u_k是$x_1, x_2, \cdots, x_{n_k}$的某个函数：

$$u_k = h_k(x_1, x_2, \cdots, x_{n_k}) \qquad (3)$$

注 对于情况3°有

$$h_k(x_1, x_2, \cdots, x_{n_k}) = g_k(x_1, x_2, \cdots, x_{n_k})$$

仿照上节中的讨论，由1°与2°易证，尽管某些x有两种b进位小数表示法，但按上述规定定义的函数$f(x)$之值是唯一确定的；而由（3）则易证$f(x)$是连续函数。

下面我们来讨论$f(x)$不可微的条件。

设$x\in(0, 1]$，且x与$f(x)$分别由（1）与

（2）表示。我们约定，如果x有两种b进小数表示法，则（1）取从某位起x_k恒为0的形式。于是存在任意大的正整数l，设$n_m<l\leqslant n_{m+1}$，使得$x_l<b-1$。令

$$x'=0.x_1'x_2'\cdots x_k'\cdots \text{（}b\text{进位）}$$

$$f(x')=0.u_1'u_2'\cdots u_k'\cdots \text{（二进位）}$$

其中

$$x_k'=x_k,\quad 1\leqslant k<l;$$

$$x_l'=b-1;$$

$$x_i'(n_{m+1}<i\leqslant n_{m+2})=0;$$

$$x'_j(n_{m+2}<j\leqslant n_{m+3})=\begin{cases}0,\ \text{如果}u_{m+3}=u_{m+1}\\ b-1,\ \text{如果}u_{m+3}\\ \qquad =1-u_{m+2}\end{cases}$$

$$x'_p(n_{m+3}<p\leqslant n_{m+4})=\begin{cases}x'_{n_{m+3}},\ \text{如果}u_{m+4}\\ \qquad =u'_{m+3}\\ b-1-x'_{n_{m+3}},\ \text{如果}\\ \qquad u_{m+4}=1-u'_{m+3}\end{cases}$$

对于所有其它情况，x'_k任意。由于x'的b进小数表示式中的前n_{m+3}位小数确定后，u'_{m+3}即被确定，故上述规定x'_p的方法是合理的。

易知，如果$u'_{m+1}=1-u_{m+1}$，则$u'_{m+3}=u_{m+3}$；如果$u'_{m+1}=u_{m+1}$，则$u'_{m+3}=1-u_{m+3}$，且$u'_{m+4}=u_{m+4}$，故不论何种情况，恒有

$$|f(x)-f\geqslant(x)|\frac{1}{2^{m+4}} \tag{4}$$

又显然有

$$0<x'-x<\frac{1}{b^{n_m}} \tag{5}$$

由（4）与（5）有

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right|>\frac{b^{n_m}}{2^{m+4}} \tag{6}$$

由于$n_m\geqslant m$，故由（6）有

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right|>\frac{1}{2^4}\left(\frac{b}{2}\right)^m \tag{7}$$

由m可任意大，故由（7）知，当$b\geqslant3$时$f(x)$在x处不存在有限的右导数。如果$b=2$，则由（6）有

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right|>2^{n_m-m-4} \tag{8}$$

从而由（8）知，如果

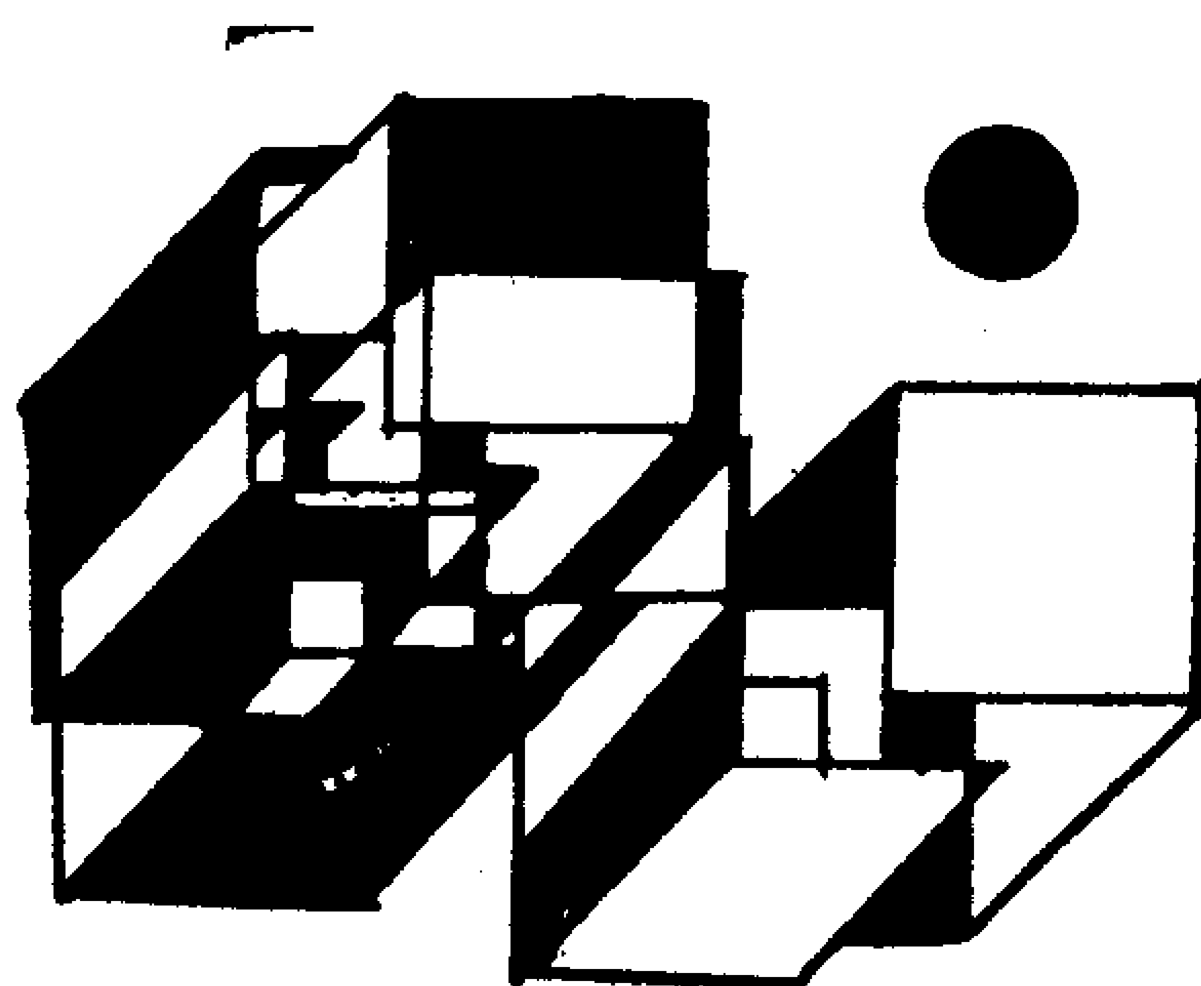
$$\lim_{k\to\infty}(n_k-k)=\infty \tag{9}$$

则f在x处不存在有限的右导数。

同理可证当$b\geqslant3$ 或（9）成立时，$f(x)$ 在(0,1]中处处不存在有限的左导数。

进一步的讨论参见[50]。

四 构造无处可微连续函数的其它方法



1. 利用小数和级数的构造方法

在第二部分和第三部分中我们分别讨论了利用级数和小数构造无处可微连续函数的问题，本节中我们将这两种工具结合起来使用.

设$x\in[0,1]$,其十进小数表示式为

$$x=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots,\quad 0\leqslant x_k\leqslant 9 \tag{1}$$

令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)}{\lambda^k} \tag{2}$$

其中$\lambda>1$为常数，$u_1(x)=1$；当$k>1$时，

$$u_k=\begin{cases}u_{k-1}, & \text{如果}x_k=x_{k-1}\\ (1-\lambda)u_{k-1}, & \text{如果}x_k\neq x_{k-1}\end{cases}$$

易知，尽管对于某些x有两种十进小数表示法，但按上述规定所定义的函数$f(x)$的值是唯一确定的。事实上，设

$$x=0.x_1\cdots x_n000\cdots,\quad x_n>0 \tag{3}$$

和

$$x=0.x_1\cdots x_{n-1}x'_n999\cdots,\quad x'_n=x_n-1 \tag{4}$$

是x的两种十进小数表示法，由于u_k之值仅依赖于（1）的前k位小数，故当x分别由（3）与（4）表示时，$f(x)$之值分别为

$$u=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{\lambda^k}+u_n(1-\lambda)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{\lambda^k}$$

$$u'=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{\lambda^k}+\frac{u'_n}{\lambda^n}+(1-\lambda)u'_n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{\lambda^k}=u$$

用归纳法易证，当$1<\lambda\leqslant 2$时有

$$(\lambda-1)^{n-1}\leqslant|u_n|\leqslant 1 \tag{5}$$

当$\lambda\geqslant 2$时有

$$1\leqslant|u_n|\leqslant(\lambda-1)^{n-1} \tag{6}$$

由（5）与（6）知，（2）恒收敛，故$f(x)$有意义。

下面我们来证明：

1）$f(x)$处处连续。

设$x\in[0,1)$，且x与 $f(x)$ 分别由（1）与（2）表示。我们约定，如果x有两种十进小数表示法，则取末尾各数字恒为0的那种表示法。

考虑$\lambda\geqslant 2$的情况，任给$\varepsilon>0$，取正整数n充分大，使得$2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n<\varepsilon$。令

$$x^*=0.x_1\cdots x_n999\cdots$$

则当$x<x'<x^*$时有

$$x'=0.x_1\cdots x_n x'_{n+1}x'_{n+2}\cdots,\quad 0\leqslant x'_{n+k}\leqslant 9$$

由于（2）中的u_k 仅依赖于（1）中的前k位小数，故有

$$f(x')=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{\lambda^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{u'_k}{\lambda^k}$$

于是由（6）有

$$|f(x')-f(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|u'_k-u_k|}{\lambda^k}$$

$$\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\lambda-1)^{k-1}}{\lambda^k}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n<\varepsilon$$

故f在x处右连续．同理可证f左连续．

用类似的方法可以证明$1<\lambda\leqslant 2$的情况。

2）当$2\leqslant\lambda<10$时，$f(x)$处处不存在有限单侧导数。

设 $0\leqslant x<1$，且x与 $f(x)$ 分别由（1）与（2）表示．由前面的约定知，存在任意大的正整数n，使$x_n<9$，令

$x'=0.x_1\cdots x_{n-1}9000\cdots$　（末尾各数字为0）

$x''=0.x_1\cdots x_{n-1}9911\cdots$（末尾各数字为1）

则

$$x<x'<x'',x''-x<\frac{1}{10^{n-1}}$$

$$\frac{1}{10^{n+1}}<x''-x'<\frac{1}{10^{n}} \tag{7}$$

于是

$$x''-x'>\frac{x''-x}{10^{2}}>\frac{x'-x}{10^{2}} \tag{8}$$

易知

$$f(x')=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{\lambda^k}+\frac{u'_n}{\lambda^n}+(1-\lambda)u'_n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{\lambda^n}$$

$$f(x'')=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{\lambda^k}+\frac{u_n'}{\lambda^n}+\frac{u'_n}{\lambda^{n+1}}$$

$$+(1-\lambda)u_n'\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}+\frac{u_k}{\lambda^k}+\frac{u'_n}{\lambda^n}$$

其中由（6）知$|u'_n|\geqslant 1$。于是

$$|f(x'')-f(x')|=\frac{|u'_n|}{\lambda^n}\geqslant\frac{1}{\lambda^n} \qquad (9)$$

由（7）与（9）有

$$\frac{|f(x'')-f(x')|}{x''-x'}>\left(\frac{10}{\lambda}\right)^n\to\infty(n\to\infty) \quad (10)$$

又由（8）有

$$\frac{|f(x'')-f(x')|}{x''-x'}\leqslant\frac{|f(x'')-f(x)|}{x''-x'}$$

$$+\frac{|f(x')-f(x)|}{x''-x'}$$

$$\leqslant\frac{10^2|f(x'')-f(x)|}{x''-x}$$

$$+\frac{10^2|f(x')-f(x)|}{x'-x} \qquad (11)$$

由（10）与（11）知，当$2\leqslant\lambda<10$时f在x处不

存在有限的右导数.

同理可证f在$(0,1]$中处处不存在有限的左导数.

2. 利用连分数的构造方法

本节中我们用记号

$$[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_k,\ \cdots] \tag{1}$$

表示无限连分数，用记号

$$[a_0;\ a_1,a_2,\cdots,a_n] \tag{2}$$

表示有限连分数，其中a_0为整数，$a_k(k\geqslant 1)$为正整数；又用$\frac{p_k}{q_k}$表示连分数（1）或（2）的k阶渐近分数. 如果 $n>1$, $a_n=1$, 则 n 项连分数（2）也可以写成$n-1$项连分数，即

$$[a_0;a_1,\cdots,a_{n-1},a_n]=[a_0;a_1,\cdots,a_{n-2},\ a_{n-1}+1], \tag{3}$$

有关连分数的知识可参考辛钦的书[62].

下面我们利用连分数的工具来构造单侧无处可微的连续函数.

设$b\geqslant 2$为整数，$x\in[0,\ 1]$，其b进小数表示为

$$x=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots,\quad 0\leqslant x_k\leqslant b-1 \qquad (4)$$

将（4）的各位小数所组成的序列分隔成若干段，使得每一段全由相同的数字组成，而相邻段的数字是不同的，每一个这样的段叫做一个连贯．换句话说，一个连贯就是由相同数字所组成的不能再长的每一个序列段。一个连贯中所包含的数字的个数（可以为∞）称为该连贯的长度。例如，

$$x=0.1125556663\cdots$$

的前4个连贯依次为11，2，555，666，其长度分别为2，1，3，3；又例如，

$$x=0.221555\cdots\text{（末尾各数字均为 5）}$$

共有3个连贯，其长度依次为2，1，∞。

设$x\in[0,\ 1]$且由（4）表示．又设（4）的连贯长度所组成的序列为$\{a_k\}$，其中a_k表示（4）的第k个连贯的长度．如果$\{a_k\}$是一个无穷序列，则定义

$$f(x)=[0;\ a_1,a_2,\cdots,a_k\cdots] \qquad (5)$$

如果$\{a_k\}$是一有穷序列：

$$a_1,a_2,\cdots,a_N,\ a_{N+1} \qquad (6)$$

其中$a_{N+1}=\infty$，则定义

$$f(x)=[0;a_1,\cdots,a_N] \qquad (7)$$

如果$\{a_k\}$只有一项$a_1=\infty$，则定义

$$f(x)=0 \tag{8}$$

易知，尽管某些x有两种b进小数表示法，因而相应的连贯长度序列$\{a_k\}$也可能不一样，但以上定义的$f(x)$之值是唯一确定的。

事实上，设$x\in(0,1)$是10进有理数（为叙述方便起见，设$b=10$），它的两种10进小数表示为

$$x=0.x_1\cdots x_n\,000\cdots\quad(x_n>0) \tag{9}$$

$$x=0.x_1\cdots x_{n-1}x_n'999\cdots(x'_n=x_n-1) \tag{10}$$

设相应于（9）的连贯长度序列为

$$a_1,\cdots,a_N,\ \infty$$

关于相应于（10）的连贯长度序列分以下几种情况考虑：

1） $x_n\neq x_{n-1}$, $x_n'\neq x_{n-1}$

2） $x_n\neq x_{n-1}$, $x'_n=x_{n-1}$

3） $x_n=x_{n-1}$, $x_n'\neq x_{n-1}$

易知，对于这三种情况相应于（10）的连贯长度序列分别为

$$a_1,\cdots,a_N,\infty$$

$$a_1,\cdots,a_{N-2},\ a_{N-1}+1$$

$$a_1,\cdots,\ a_{N-1},\ a_N-1,\ 1$$

且对于第一种情况有$a_N=1$。于是由连分数的性质（3）知，不论x是由（9）或（10）表示，由

（7）定义的$f(x)$之值是唯一确定的.

以上讨论假定了$n>1$及$N>1$. 对于$n=1$，或$n>1$而$N=1$的情况，$f(x)$的唯一确定性同样是显然的.

下面我们来证明：

1）$f(x)$是连续函数.

设x由（4）表示. 先考虑$\{a_k\}$为无穷序列的情况. 此时$f(x)$由（5）定义. 易知，对于任意大的正整数n（为确定起见，设n为奇数），当x'充分接近x时，可使x'与x的前$a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}$位小数完全相同，于是

$$[0; a_1, \cdots, a_{n-1}] < f(x') < [0; a_1, \cdots, a_n]$$

又$f(x)$也满足上述不等式，故有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x)| &< [0; a_1, \cdots, a_n] \\ &\quad - [0; a_1, \cdots, a_{n-1}] \\ &= \frac{1}{q_n q_{n-1}} \to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

故f在x处连续.

现在考虑$\{a_k\}$为有限序列的情况. 我们约定，如果x有两种b进小数表示法，则（4）取末尾各数字恒为0的形式. 设$\{a_k\}$是形如（6）的序列，此时$f(x)$由（7）定义. 易知对于任意大的正整数m，当$x'>x$且x'充分接近x时，可

使x'与x的前$a_1+\cdots+a_N+m$位小数完全相同，设相应于x'的连贯长度序列为

$$a_1,\cdots,a_N,a'_{N+1},a'_{N+2}\cdots$$

则

$$m\leqslant a'_{N+1}<\infty \tag{11}$$

如果N为偶数，则

$$[0;a_1,\cdots,a_N]<f(x')\leqslant[0;a_1,\cdots,a_N,a'_{N+1}] \tag{12}$$

如果N为奇数，则

$$[0;a_1,\cdots,a_N,a'_{N+1}]\leqslant f(x')<[0;a_1,\cdots,a_N] \tag{13}$$

由(7)，(12)，(13)及(11)并根据渐近分数的性质有

$$0<|f(x')-f(x)|\leqslant|[0;a_1,\cdots,a_N,a'_{N+1}]-[0;a_1,\cdots,a_N]|$$

$$=\frac{1}{q_Nq_{N+1}}<\frac{1}{a_{N+1}q_N^2}\leqslant\frac{1}{mq_N^2} \tag{14}$$

其中q_N与q_{N+1}分别为$[0;a_1,\cdots,a_N,a'_{N+1}]$的$N$阶和$N+1$阶渐近分数的分母．由于$m$可任意大，故由（14）知$f$在$x$处右连续．$f$在$x$处的左连续性可类似地证明．

同理可证当$\{a_k\}$只有一项$a_1=\infty$时f也在x处连续．

2）当$b\geqslant 5$时$f(x)$处处不存在有限的单侧导数.

设 $x\in[0,1)$ 且由（4）表示. 我们约定，如果x有两种b进小数表示法，则（4）取末尾各数字恒为0的形式. 于是存在任意大的n使$x_n<b-1$. 令

$$x'=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{b^k}+\frac{b-1}{b^n}$$

$$x''=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{b^k}+\frac{b-1}{b^n}+\frac{1}{b^{n+1}}$$

则$x<x'<x''$，且

$$x''-x'=\frac{1}{b^{n+1}}>\frac{1}{b^2}(x''-x) \qquad (15)$$

设相应于x'的连贯长度序列为$\{a_1,\cdots,a_N,\infty\}$，则相应于$x''$的连贯长度序列为$\{a_1,\ \cdots,\ a_N,\ 1,\infty\}$（设$b>2$），于是

$$\sum_{k=1}^{N}a_k=n$$

$$f(x')=[0;a_1,\cdots,a_N]$$

又

$$f(x'')=[0;a_1,\cdots,a_N,1]$$

$$|f(x'')-f(x')|=\frac{1}{q_Nq_{N+1}}>\frac{1}{q_N^2} \qquad (16)$$

其中q_N与q_{N+1}分别为$[0;a_1,\cdots,a_N,1]$的N阶和N

+1 阶渐近分数的分母．又由渐近分数的归纳定义及算术—几何平均不等式有

$$q_N<\prod_{k=1}^{N}(\alpha_k+1)\leqslant\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}{N}+1\right)^N$$

$$=\left(\frac{n}{N}+1\right)^N \tag{17}$$

由(15)—(17)有

$$\frac{|f(x'')-f(x')|}{x''-x'}>\frac{b^n}{\left(\frac{n}{N}+1\right)^{2N}}$$

$$=\left[\frac{b}{(\lambda+1)^{2/\lambda}}\right]^n \tag{18}$$

其中 $\lambda=\frac{n}{N}\geqslant1$．因为 $\varphi(\lambda)=(\lambda+1)^{2/\lambda}$ 在区间〔1,∞)内递减（参见〔65〕,p.133),故由（18）有

$$\frac{|f(x'')-f(x')|}{x''-x'}>\left(\frac{b}{4}\right)^n \tag{19}$$

又由（15）有

$$\frac{|f(x'')-f(x')|}{x''-x'}\leqslant\frac{|f(x'')-f(x)|}{x''-x'}$$

$$+\frac{|f(x')-f(x)|}{x''-x'}$$

$$\leqslant \frac{b^2 |f(x'') - f(x)|}{x'' - x} + \frac{b^2 |f(x') - f(x)|}{x' - x} \tag{20}$$

由(19)与(20)知，当$b \geqslant 5$时f在x处不存在有限的右导数.

同理可证当$b \geqslant 5$时f在$(0,1]$中处处不存在有限的左导数.

3. 利用无穷乘积的构造方法

前面我们已看到，历史上无处可微连续函数的一些著名例子大都是用级数来构造的。本节中我们要给出利用无穷乘积构造单侧无处可微连续函数的一种方法，这种方法实质上是级数法的一个变种。

引理 设$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是区间(a,b)上的连续函数且$|f_n(x)| \leqslant c_n$，其中级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，则函数

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

是(a,b)上的连续函数。

定理 设$0<a_n<1$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，p_n为正偶数，$b_n=\prod_{k=1}^{n} p_k$。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_n p_n}=0 \tag{1}$$

则

$$f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n\sin b_n\pi x)$$

是处处不存在有限单侧导数的连续函数。

证明 根据以上引理 $f(x)$ 的连续性是显然的，下面我们来证明$f(x)$处处不存在有限的单侧导数。设x固定。对任何正整数n，存在唯一的整数N_n，使$\frac{N_n}{b_n}\leqslant x<\frac{N_n+1}{b_n}$，令

$$x_n=\frac{1}{b_n}(N_n+1),\quad x'_n=\frac{1}{b_n}\left(N_n+\frac{3}{2}\right)$$

则

$$x<x_n<x_n',\quad 0<x_n'-x<\frac{3}{2b_n}$$

$$x_n'-x_n=\frac{1}{2b_n} \tag{2}$$

$$x'_n - x_n \geqslant \frac{1}{3}(x'_n - x) > \frac{1}{3}(x_n - x) \qquad (3)$$

令

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)=a, \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=b$$

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k\text{isn}b_k\pi x)$$

则

$$\begin{aligned} f(x'_n)-f(x_n) &= f_n(x'_n)-f_n(x_n) \\ &= f_{n-1}(x_n')-f_{n-1}(x_n) \\ &\quad -(-1)^{Nn}a_nf_{n-1}(x'_n) \end{aligned} \qquad (4)$$

$$a < f_n(x) < b \qquad (5)$$

当$k<n$时由（2）有

$$|a_k\sin b_k\pi x'_n - a_k\sin b_k\pi x_n| \leqslant \frac{a_kb_k\pi}{2b_n} < \frac{\pi}{2p_n} \qquad (6)$$

由（6）有

$$a_k\sin b_k\pi x_n' = a_k\sin b_k\pi x_n + \sigma_k$$

其中$|\sigma_k| < \frac{\pi}{2p_n} < 1$，于是

$$|f_{n-1}(x_n') - f_{n-1}(x_n)| = \left|\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k\sin b_k\pi x_n\right.$$

$$+\sigma_k)-\prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k\sin b_k\pi x_n)\Bigg|$$

$$<2^{n-1}b\cdot\frac{\pi}{2p_n} \qquad (7)$$

注 将第一个乘积的每个因子看成是两项 $(1+a_k\sin b_k\pi x_n)$ 与 σ_k 之和，然后将此乘积展开成 2^{n-1} 项，其中不包含 σ 的一项与第二个乘积相消，其余含 σ 的各项的绝对值均小于 $\frac{b\pi}{2p_n}$，因此(7)式成立。

由（4），（5）与（7）有

$$|f(x_n')-f(x_n)|\geqslant a_nf_{n-1}(x_n')$$
$$-|f_{n-1}(x_n')-f_{n-1}(x_n)|$$
$$>a_na-\frac{2^nb\pi}{4p_n} \qquad (8)$$

由（1）知存在 $\lambda<a$ 使当 n 充分大时有

$$\frac{2^nb\pi}{4p_n}<\lambda a_n \qquad (9)$$

由(8),(9)与(2)，当 n 充分大时有

$$\frac{|f(x_n')-f(x_n)|}{x_n'-x_n}>2(a-\lambda)a_nb_n\to\infty$$
$$(n\to\infty) \qquad (10)$$

又由（3）有

$$\frac{|f(x_n')-f(x_n)|}{x_n'-x_n}\leqslant\frac{|f(x_n')-f(x)|}{x'_n-x_n}$$

$$+\frac{|f(x_n)-f(x)|}{x_n'-x_n}$$

$$\leqslant\frac{3|f(x_n')-f(x)|}{x'_n-x}$$

$$+\frac{3|f(x_n)-f(x)|}{x_n-x} \qquad (11)$$

由（11）知，如果f在x处有有限的右导数，则当$n\to\infty$时$\frac{|f(x_n')-f(x_n)|}{x_n'-x_n}$有界，这与（10）矛盾，故$f$在$x$处不可能具有有限的右导数。

同理可证f处处不存在有限的左导数。 □

4.利用康托级数的构造方法

首先我们对所用工具——康托级数作一简单介绍。

设$\{p_n\}$是满足条件

$$p_n\geqslant 2\ (n=1,2,3,\cdots)$$

的已给自然数列。将区间$[0,1]$等分成p_1个闭区

间：

$$\delta_0=\left[0,\frac{1}{p_1}\right],\ \delta_1=\left[\frac{1}{p_1},\ \frac{2}{p_1}\right],\ \cdots,\ \delta_{p_1-1}$$

$$=\left[\frac{p_1-1}{p_1},1\right]$$ 这些区间都称为1阶区间。

一般地，将每个 n 阶区间 $\delta_{x_1\cdots x_n}(x_i=0,1,\cdots,p_i-1;\ i=1,2,\cdots,n)$都等分成$p_{n+1}$个区间：

$$\delta_{x_1\cdots x_n x_{n+1}}\ \ (x_{n+1}=0,1,\cdots,p_{n+1}-1)$$

就得到$n+1$阶区间．如此继续下去，就得到一切n阶区间$(n=1,2,3,\cdots)$．由区间套定理知，对于满足条件

$$0\leqslant x_n<p_n-1\ \ (n=1,2,\cdots)\qquad (1)$$

的任一整数列$\{x_n\}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}\delta_{x_1\cdots x_n}$ 由〔0，1〕中唯一的一个点组成．显然，对于任意的$x\in[0,1]$，存在相应的满足条件（1）的整数列$\{x_n\}$，使得

$$\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\delta_{x_1\cdots x_n}\qquad (2)$$

易知当（2）成立时，x可表示为

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{p_1p_2\cdots p_n},\quad 0\leqslant x_n\leqslant p_n-1\qquad (3)$$

（3）称为x的康托级数表示，x_n称为第 n 个位

标．如果x是某区间的端点且$x\neq0$与1，则存在两个满足条件（1）的整数列$\{x_n\}$使（2）成立，其中一个序列从某项起恒有$x_n=0$；另一个序列从某项起恒有$x_n=p_n-1$，此时x也就有两种康托级数表示．

康托级数是实数的小数表示的一种直接推广，当$p_n=b(b\geqslant2)$时，（3）就是x的b进小数展式．

下面我们利用康托级数来构造一个单侧无处可微连续函数的例子．

设$x\in[0,1]$，其康托级数表示为（3）．令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n(n+1)} \tag{4}$$

其中$u_1=1$，当$n\geqslant1$时，

$$u_{n+1}=\begin{cases}-\dfrac{u_n}{n}, & \text{如果}x_{n+1}=0\text{而}x_n\neq0\text{，或}\\ & x_{n+1}=p_{n+1}-1\text{而 }x_n\neq p_n-1\\ u_n, & \text{对于其它情况}\end{cases} \tag{5}$$

易知，尽管某些x有两种康托级数表示法，但由（4）与（5）所定义的$f(x)$之值是唯一确定的．事实上，设

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}\quad(x_n>0)\tag{6}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\frac{x_n-1}{p_1\cdots p_n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-1}{p_1\cdots p_k}\tag{7}$$

是x的两种康托级数表示法，由于u_k之值仅依赖于（3）的前k个位标，故当x分别由（6）与（7）表示时，$f(x)$的值分别为

$$u=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k(k+1)}-\frac{u_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{k(k+1)}$$

$$u'=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{k(k+1)}+\frac{u'_n}{n(n+1)}$$

$$-\frac{u'_n}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{k(k+1)}$$

故$u=u'$。

令设$x\in[0,1)$且x与$f(x)$分别由（3）与（4）表示。我们约定，当x有两种康托级数表示时，（3）取末尾各位标恒为0的形式。

下面我们来证明

1）f在x处右连续.

任给$\varepsilon>0$，取正整数n充分大，使$\frac{2}{n}<\varepsilon$. 令

$$x^{*}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-1}{p_1\cdots p_k}$$

则当 $x<x'<x^{*}$时有

$$x'=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x'_k}{p_1\cdots p_k},$$

$$0\leqslant x'_k\leqslant p_k-1$$

由于（4）中的u_k仅依赖于（3）的前k个位标，故有

$$f(x')=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k(k+1)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{u_k'}{k(k+1)}$$

$$|f(x')-f(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|u_k'-u_k|}{k(k+1)}$$

$$<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2}{n+1}<\varepsilon$$

故f在x处右连续.

2）如果$p_k\geqslant 3$ $(k=1,2,\cdots)$且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1\cdots p_n}{n!}=\infty \qquad (8)$$

则f在x处不存在有限的右导数.

由前面的约定知，存在任意大的n使$x_n<p_n-1$。令

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\frac{x_n+1}{p_1\cdots p_n}$$

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\frac{x_n+1}{p_1\cdots p_n}$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-2}{p_1\cdots p_k}$$

易知$x<a_n<b_n$，且

$$b_n-a_n<\frac{1}{p_1\cdots p_n} \tag{9}$$

$$b_n-x=\frac{1}{p_1\cdots p_n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-2}{p_1\cdots p_k}<\frac{2}{p_1\cdots p_n}$$

$$b_n-a_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-2}{p_1\cdots p_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2p_k-4}{p_1\cdots p_k}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-1}{p_1\cdots p_k}\ (\because p_k\geqslant 3)$$

$$=\frac{1}{2p_1\cdots p_n}$$

于是有

$$b_n-a_n>\frac{1}{4}(b_n-x)$$

易知

$$f(a_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k'}{k(k+1)}-\frac{u_n'}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$f(b_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k(k+1)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{u'_n}{k(k+1)}$$

于是

$$f(b_n)-f(a_n)=\frac{u'_n}{n} \tag{10}$$

由（4）易知$|u'_n|\geqslant\frac{1}{(n-1)!}$，由（8）—(10)有

$$\frac{|f(b_n)-f(a_n)|}{b_n-a_n}\geqslant\frac{p_1\cdots p_n}{n!}\to\infty \quad (当\ n\to\infty)$$

故由第二部分1之引理2知，f在x处不存在有限的右导数。

同理可证f在(0，1]中左连续且在2中的条件下不存在有限的左导数。

5. 几何方法

本节中我们要用几何方法来构造无处可微函数，这个方法既简单、直观，而又具有一般性。

设$\sum_{n=1}^{\infty} h_n$是任一收敛的正项级数，λ为任一大于1的常数.

以x轴为底作任一齿高不大于h_1的齿形折线（构成各齿的三角形不一定等腰，各齿的高度也不要求相等），并称之为一阶齿形折线. 记相应的函数为$f_1(x)$. 如图4.1，$[a,b]$，$[b,c]$等区间都称为$f_1(x)$的线性区间. 线段l的斜率称为$f_1(x)$在$[a,b]$上的线性系数.

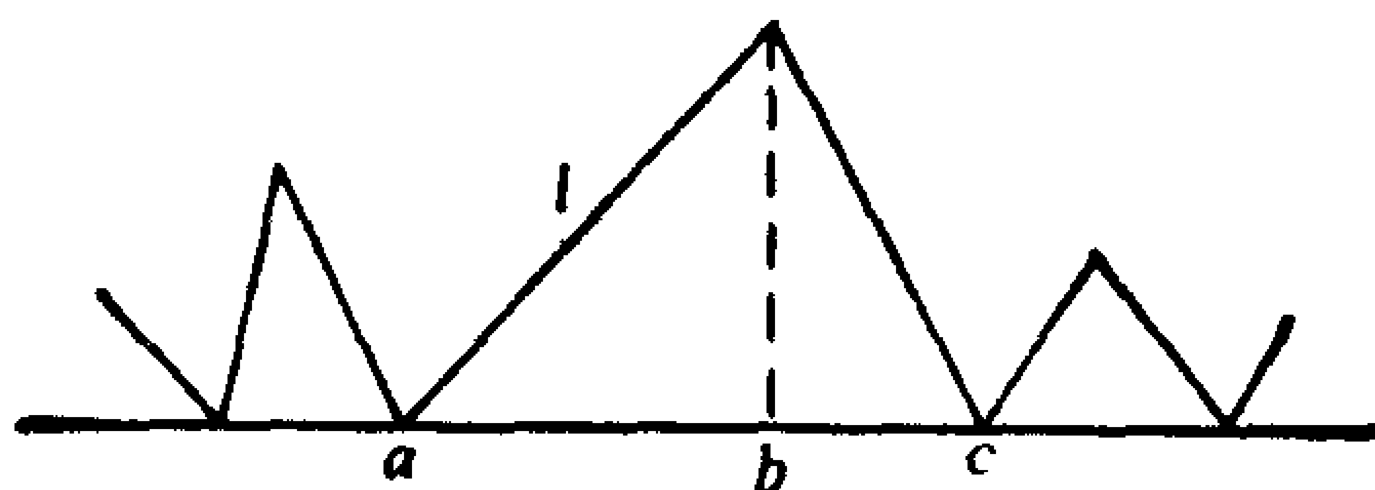


图4.1

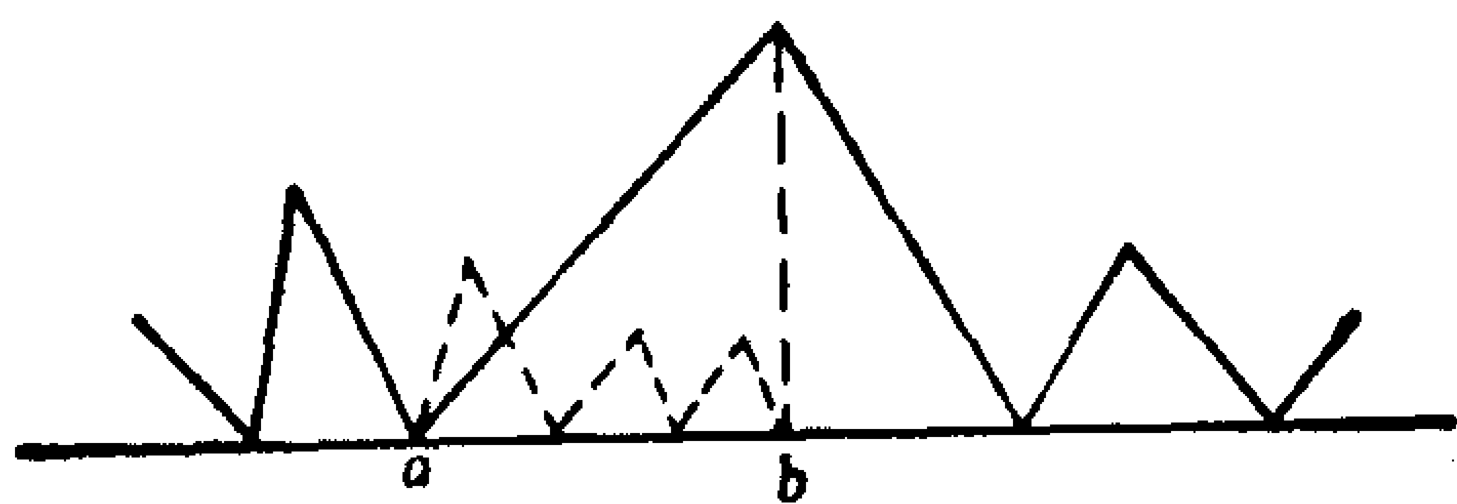


图4.2

设当$1\leqslant k\leqslant n$时，一切k阶齿形折线都已定义，其相应的函数为$f_k(x)$，并设对于任何$1\leqslant k\leqslant n$，$f_n(x)$的每个线性区间都包含在$f_k(x)$的某个

线性区间中．今设$[a,b]$是$f_n(x)$的任一线性区间（图4.2所表示的是$n=1$的情况），$f_k(x)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$在$[a, b]$上的线性系数为$\lambda_k$．以$[a, b]$为底作一齿高不大于 h_{n+1} 的齿形折线，使得构成各齿的各个直线段的斜率的绝对值大于$\lambda\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|$．将按上述方法在 $f_n(x)$的各个线性区间上所作的诸齿形折线连接起来，便得到x 轴上的一个齿形折线，并称之为 $n+1$ 阶齿形折线．记相应的函数为 $f_{n+1}(x)$．于是由归纳法，一切阶齿形折线及相应的函数都可依次定义．

由于 $0\leqslant f_n(x)\leqslant h_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} h_n$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于一个连续函数 $f(x)$．下面我们要证明$f(x)$处处不存在有限的导数．

设x是数轴上任一点，f_k 的包含x 的线性区间为$[a_k,b_k]$，并仍用 λ_k 表示f_k在$[a_k,b_k]$ 上的线性系数 $(k=1,2,\cdots)$．易知对于任何n，当$k>n$ 时有

$$f_k(a_n)=f_k(b_n)=0$$

设当$k\leqslant n$时，f_k在$[a_n,b_n]$上的线性系数为λ_k，于

是有

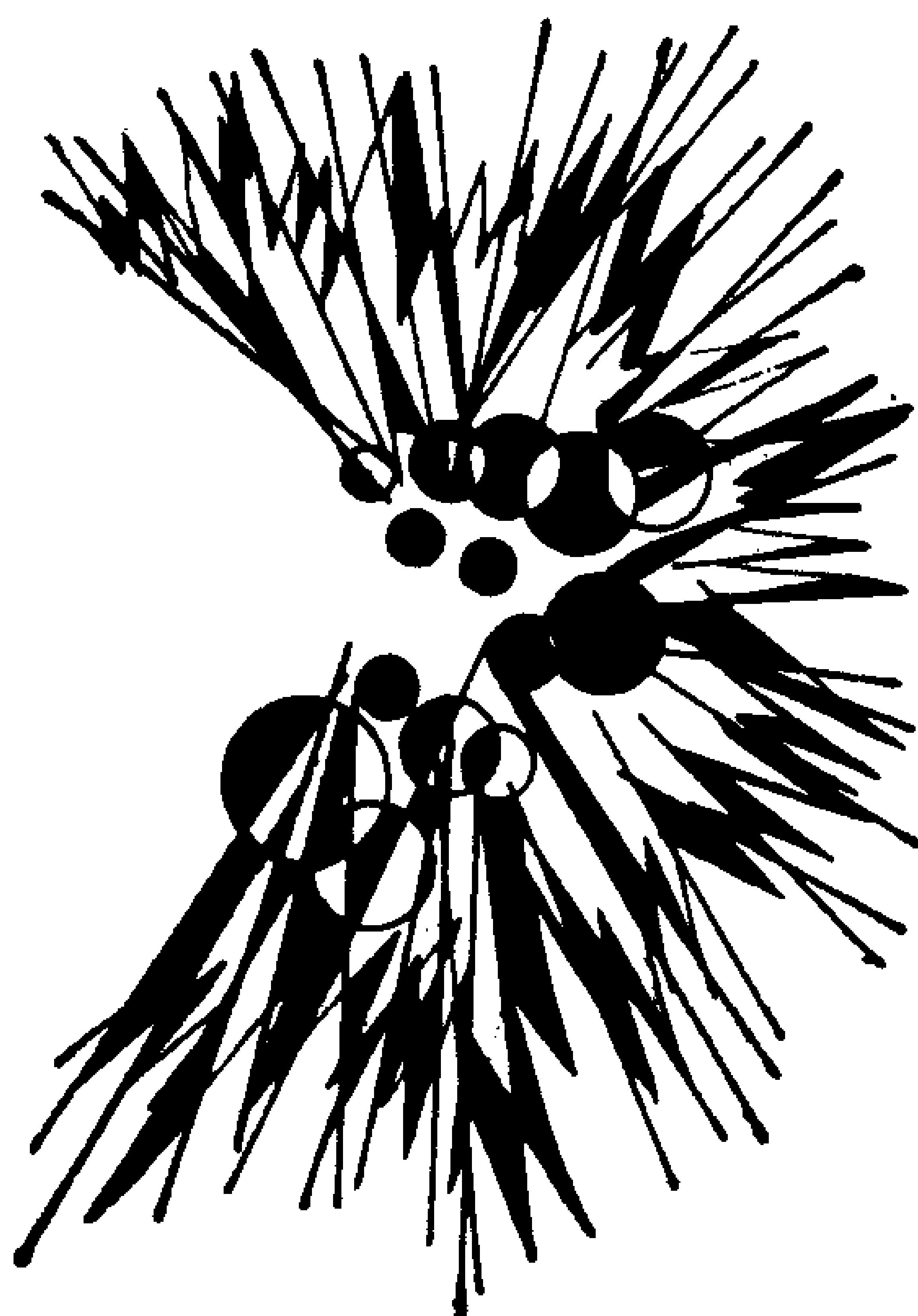
$$
\begin{aligned}
|f(b_n)-f(a_n)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}[f_k(b_n)-f_k(a_n)]\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(b_n-a_n)\right| \\
&\geqslant |\lambda_n|(b_n-a_n)-\sum_{k=1}^{n-1}|\lambda_k|(b_n-a_n) \\
&> (\lambda-1)(b_n-a_n)\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k
\end{aligned}
$$

由此得

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{|f(b_n)-f(a_n)|}{b_n-a_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}(\lambda-1)\sum_{k=1}^{n-1}|\lambda_k| = +\infty
$$

故f在x处不存在有限的导数。

五 无处可微函数的性质



1. 狄尼导数

因为即使对于连续函数通常的导数也可能处处不存在，故引进一种对任何函数均有意义的导数概念是有价值的．下面我们来讨论这个问题．

定义 1 设I是区间，$x_0\in I$，f是对所有$x\in I$，$x\neq x_0$，定义的实值函数．设$\delta>0$，并令

$$M_\delta(x_0)=\sup\{f(x)\},\quad 0<|x-x_0|<\delta$$

$$m_\delta(x_0)=\inf\{f(x)\},\quad 0<|x-x_0|<\delta$$

当δ减小时，$M_\delta(x_0)$不增加，$m_\delta(x_0)$不减少，因此存在着（有限或无限的）极限

$$M(x_0)=\lim_{\delta\to0+}M_\delta(x_0)=\lim_{\delta\to0+}\sup_{0<|x-x_0|<\delta}\{f(x)\}$$

$$m(x_0)=\lim_{\delta\to0+}m_\delta(x_0)=\lim_{\delta\to0+}\inf_{0<|x-x_0|<\delta}\{f(x)\}$$

$M(x_0)$与$m(x_0)$分别称为当 $x\to x_0$时$f(x)$ 的上极限和下极限，并分别记为

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x),\quad \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$$

与此类似，当$x\to x_0+0$时$f(x)$的右上极限和右下极限定义为

$$\overline{\lim_{x\to x_0+0}} f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{0<x-x_0<\delta}\{f(x)\}$$

$$\underline{\lim_{x\to x_0+0}} f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\inf_{0<x-x_0<\delta}\{f(x)\}$$

同样，当$x\to x_0-0$时$f(x)$的左上极限和左下极限分别定义为

$$\overline{\lim_{x\to x_0-0}} f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{0<x_0-x<\delta}\{f(x)\}$$

$$\underline{\lim_{x\to x_0-0}} f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\inf_{0<x_0-x<\delta}\{f(x)\}$$

定义 2 设$f(x)$是定义在区间 I上的实值函数，$x_0\in I$，则分别称

$$D^+f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D^-f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D_+f(x)=\underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D_-f(x)=\varliminf_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

为f在x处的右上、左上、右下、左下导数。这四个导数统称为狄尼导数。它们的几何意义显然是曲线$y=f(x)$ 在点 x处的割线摆动的左、右两极端方向的正切。

例 1 函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & 当0<x\leqslant1\\ 0, & 当x=0\\ \frac{1}{2}x\sin\frac{1}{x}, & 当-1\leqslant x<0\end{cases}$$

在$x=0$处的四个狄尼导数为

$$D^+f(0)=1,\quad D^-f(0)=\frac{1}{2}$$

$$D_+f(0)=-1,\ D_-f(0)=-\frac{1}{2}$$

例 2 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\ \sin\frac{1}{x}, & 当x\neq0\\ 0, & 当x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的四个狄尼导数为

$$D^+f(0)=D^-f(0)=+\infty$$

$$D_+f(0)=D_-f(0)=-\infty$$

显然，f在x处的通常导数$f'(x)$存在（可以为$+\infty$或$-\infty$）的充要条件是四个狄尼导数相等：

$$D^+f(x)=D_+f(x)=D^-f(x)$$
$$=D_-f(x)$$

其公共值就是$f'(x)$。同样，通常的左导数$f'_-(x)$和右导数$f'_+(x)$存在的充要条件分别为

$$D^-f(x)=D_-f(x)=f'_-(x)$$
$$D^+f(x)=D_+f(x)=f'_+(x)$$

定理 1 如果$D^+f(x_0)$与$D_+f(x_0)$均有限，则$f(x)$在x_0处右连续。

证明 按定义

$$D_+f(x_0)=\varliminf_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\leqslant\varlimsup_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=D^+f(x_0)$$

故存在$\delta>0$，使当$0<h<\delta$时有

$$(D_+f(x_0)-1)h<f(x_0+h)-f(x_0)$$
$$<(D^+f(x_0)+1)h$$

由此知 f在x_0处连续。

同理可证，如果$D^-f(x_0)$与$D_-f(x_0)$均有限，则$f(x)$在x_0处左连续。 □

注 上述定理中的条件并不是连续的必要条件. 试看下面的

例3 设 $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$, 则

$$D^{+}f(0)=D_{+}f(0)=+\infty$$

$$D^{-}f(0)=D_{-}f(0)=-\infty$$

而$f(x)$在$x=0$处是连续的.

下面我们来介绍描述无处可微连续函数的四个狄尼导数的性质的一个重要定理，这个定理是由辛恩得到的，见〔42〕.

定理 2 设$f(x)$是定义在区间I上的无处可微连续函数，M是任意正数，则

$$A_1=\{x|\,x\in I,\ \ D_{+}f(x)>M\}$$

$$A_2=\{x\,|x\in I,\ \ D^{+}f(x)<-M\}$$

$$A_3=\{x\,|x\in I,\ \ D_{-}f(x)>M\}$$

$$A_4=\{x|\,x\in I,\ \ D^{-}f(x)<-M\}$$

都在 I中稠密.

辛恩的这个定理虽未断定通常的单侧无穷导数的存在（事实上，存在处处不具有有限或无限单侧导数的连续函数），但它证明了对于每个无处可微连续函数，存在处处稠密的点集，使得在其中每一点处具有对单侧无限导数存在性的任意接近的逼近.

2. 导数定理

本节中我们先来介绍描述任意函数四个狄尼导数的性质的极一般的定理——导数定理，它是微分理论中最主要的定理。

我们称实数的一个集合为零集，如果这个集合能够被有限或可列无限个区间的并所包含，而这些区间的总长度（即各区间长度之和）可以任意小。

显然数轴上的任何可列集$E=\{x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots\}$都是零集。事实上，对于任给的$\varepsilon>0$，令$\sigma_k=\left(x_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$，则$E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\sigma_k$，且诸$\sigma_k$的长度之和为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$$

由于ε可以任意小，故E是一零集。

导数定理 设$f(x)$是定义在$[a, b]$上的实值函数，则除去一个零集外，$[a, b]$能分成以下四个集：

$$A_1=\{x\mid f\text{在}x\text{处具有有限的通常导数}\}$$

$$A_2=\{x\mid D^+f(x)=D_-f(x)=\text{有限数},\ D^-f(x)=+\infty, D_+f(x)=-\infty\}$$

$$A_3=\{x\mid D_+f(x)=D^-f(x)=\text{有限数},\ D^+f(x)=+\infty,\ D_-f(x)=-\infty\}$$

$$A_4=\{x\mid D^+f(x)=D_-f(x)=+\infty,\ D_+f(x)=D_-f(x)=-\infty\}$$

当 $f(x)$ 的定义域是任一数集时，上述结论仍成立。

这个定理最初是当若阿与杨格彼此独自地就连续函数的情况证明的；其后杨格把它推广到可测函数的情形；最后沙克斯证明了这个定理对任意函数仍然成立。因此我们也称这个定理为当若阿—杨格—沙克斯定理。此定理的证明可参看〔67〕p. 19-21 及〔63〕p.199-201.

如果 f在同一点的两个狄尼导数都是左导数或都是右导数($D^+f(x)$和$D_+f(x)$)，则称它们是同侧的；如果同一点的两个狄尼导数不是同侧的，而且其中一个是上导数，另一个是下导数（例如$D^+f(x)$与$D_-f(x)$），则称它们是对角的。利用这些名称我们也可将上述导数定理改述如下：

除去一个零集外，在每一点上$f(x)$的四个狄尼导数只可能有以下两种情况：两个同侧导数或

者都有限而且相等，或者其中至少有一个为无穷大且两者不等；两个对角导数或者都有限而且相等，或者其中的上导数等于 $+\infty$ 而下导数等于 $-\infty$。

在给出导数定理的几个直接推论之前，我们先引进如下的概念：如果除去一个零集外，函数 f 在其定义域中的每一点均具有某种性质，则称 f 几乎处处具有这种性质。

推论 1 单调函数几乎处处可微（即具有通常的有限导数）。

这是因为在这种情况 A_2，A_3 和 A_4 均为空集。

由此推论知，无处可微函数在任何区间中都不单调，也就是说这种函数是处处振荡的。

推论 2 有界变差函数几乎处处可微。

这是因为有界变差函数可以表为两个增函数之差。

由此推论知，无处可微函数所表示的曲线上任两点之间的弧长是无限的。这是因为，在有限区间上的曲线具有有限长度的充要条件是表示该曲线的函数具有有界变差，而由推论 2 知，无处可微函数不可能具有有界变差。

推论 3 对于任何实值函数 $f(x)$，使 $f'(x)$

为无限的所有 x的集是一零集。

这是因为如果$f'(x)$为无限，则$x\notin A_i(i=1, 2, 3, 4)$，因而$x$属于导数定理中所除去的零集。

由此推论知，不存在处处具有无限导数的函数。

作为对照，我们顺便指出，右上导数处处为正无穷($D^+f(x)=+\infty$) 的函数是存在的，这种函数甚至可以是右连续函数。参见〔9〕，p. 125及〔33〕.

推论 4 无处可微函数几乎处处存在至少两个取无限值的对角导数（其中上导数为$+\infty$，下导数为$-\infty$）.

这是因为如果$f(x)$无处可微，则A_1为空集，而对于A_2, A_3, A_4中的任何x均满足推论中的要求。

这里我们顺便指出，〔61〕中用两页篇幅证明的一个定理（不存在不具有导出数∞的无处可微连续函数）只不过是上述推论的特殊情况，而且结论要弱得多。这正说明导数定理的价值。

3. 尖　　点

设$f(x)$是定义在区间(a, b)上的实值函数，

$x_0\in(a,b)$，如果$f'_-(x_0)=+\infty, f'_+(x_0)=-\infty$，则称$x_0$是 f的一个上尖点；如果 $f'_-(x_0)=-\infty$，$f'_+(x_0)=+\infty$，则称x_0是 f的一个下尖点。

例如，$\sqrt[3]{x^2}$在$x=0$处有一个下尖点，$-\sqrt[3]{x^2}$在$x=0$处有一个上尖点。

下面我们先来证明一个与尖点有关的定理，这个定理最初是由列维得到的。

定理 1 设$f(x)$是定义在任意区间(a, b)上的任意实值函数，令$D=\{x\mid x\in(a,b), f'_-(x)$与$f_+'(x)$存在，且$f_-'(x)\neq f_+'(x)\}$，则 D最多为一可列集。

证明 令

$$A=\{x\mid x\in(a,b),\ f_-'(x)\text{与}f'_+(x)\text{ 存在，且}f_+'(x)<f_-'(x)\}$$

$$B=\{x\mid x\in(a,b),\ f'_-(x)\text{与}f_+'(x)\text{存在，且}f_+'(x)>f'_-(x)\}$$

对于每个$x\in A$，选取有理数r_x使得

$$f_+'(x)<r_x<f_-'(x)$$

再选取有理数 s_x与t_x使得$a<s_x<x<t_x<b$，且

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>r_x,\quad \text{当}s_x<y<x \qquad (1)$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<r_x,\quad \text{当}x<y<t_x \qquad (2)$$

由（1）与（2），当$y\neq x$且$s_x<y<t_x$时，

$$f(y)-f(x)<r_x(y-x) \qquad (3)$$

于是我们得到由 A到 Q^3内的一个映射：$\varphi(x)=(r_x, s_x, t_x)$，此处$Q^3$是三维空间中三个坐标均为有理数的点的全体。下面我们要证明 φ是一个一一映射。用反证法证之，设在 A中存在不同的点x,y 使得$\varphi(x)=\varphi(y)$．于是 $(s_y,t_y)=(s_x,t_x)$，且x,y均在此区间中。由（3）有

$$f(y)-f(x)<r_x(y-x)$$

$$f(x)-f(y)<r_y(x-y)$$

因为$r_x=r_y$，故将以上两式相加得$0<0$，这就得出矛盾，故$\varphi(x)$是一一映射。由于Q^3是可列集，故A最多为一可列集．同理可证B也最多为一可列集。

□

推论 设$f(x)$是定义在区间(a, b)中的实值函数，则$f(x)$的尖点的全体最多为一可列集。

证明 由尖点的定义及定理1立即得到。□

定理2 设$0<a<1$，b为正整数，则当$ab>1$时维尔斯特拉斯函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos b^n\pi x$$

的上、下尖点的集合都处处稠密。

证明 考虑点$x=0$，我们有

$$f(0)-f(h)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(1-\cos b^n\pi h)$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(\sin\frac{1}{2}b^n\pi h\right)^2$$

取正整数m使得

$$|h|\,b^m\leqslant 1<|h|\,b^{m+1}$$

于是我们有

$$\frac{f(0)-f(h)}{|h|}>2b^m\sum_{n=0}^{m}a^n\left(\sin\frac{1}{2}b^n\pi h\right)^2$$

因为当$0\leqslant n\leqslant m$时，

$$\sin\frac{1}{2}b^n\pi\,|h|>\frac{1}{\pi}(b^n\pi\,|h|)>b^{n-m-1}$$

故我们有

$$\frac{f(0)-f(h)}{|h|}>\frac{2}{b^{m+2}}\sum_{n=0}^{m}a^nb^{2n}$$

$$>\frac{2}{b^{m+2}}\frac{a^mb^{2m}}{ab^2-1}>\frac{2}{b^2}\ \frac{a^mb^m}{ab^2-1} \qquad (4)$$

当$h\to 0$时，$m\to+\infty$，又$ab>1$，故$a^mb^m\to+\infty$，故由（4）即得

$$f'_+(0)=-\infty,\qquad f_-'(0)=+\infty \qquad (5)$$

设$x=x'+\frac{2r}{b^m}$，此处r为任意整数，m是任意正整数，我们有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m-1}a^n\cos b^n\pi x+\sum_{n=m}^{\infty}a^n\cos b^n\pi x' \quad (6)$$

令

$$\varphi(x')=\sum_{n=m}^{\infty}a^n\cos b^n\pi x'$$

仿照（5）可证

$$\varphi'_-(0)=+\infty,\quad \varphi'_+(0)=-\infty \quad (7)$$

又（6）的第一项在$x=\frac{2r}{b^m}$处具有有限的导数，于是由（6）与（7）即得

$$f'_+\left(\frac{2r}{b^m}\right)=-\infty,\qquad f'_-\left(\frac{2r}{b^m}\right)=+\infty$$

故　　$x=\frac{2r}{b^m}$是f的上尖点。显然所有点$x=\frac{2r}{b^m}$的集处处稠密。

同理可证$x=\frac{2r+1}{b^m}$（r为任意整数，m为任意正整数）是f的下尖点，且所有点$x=$

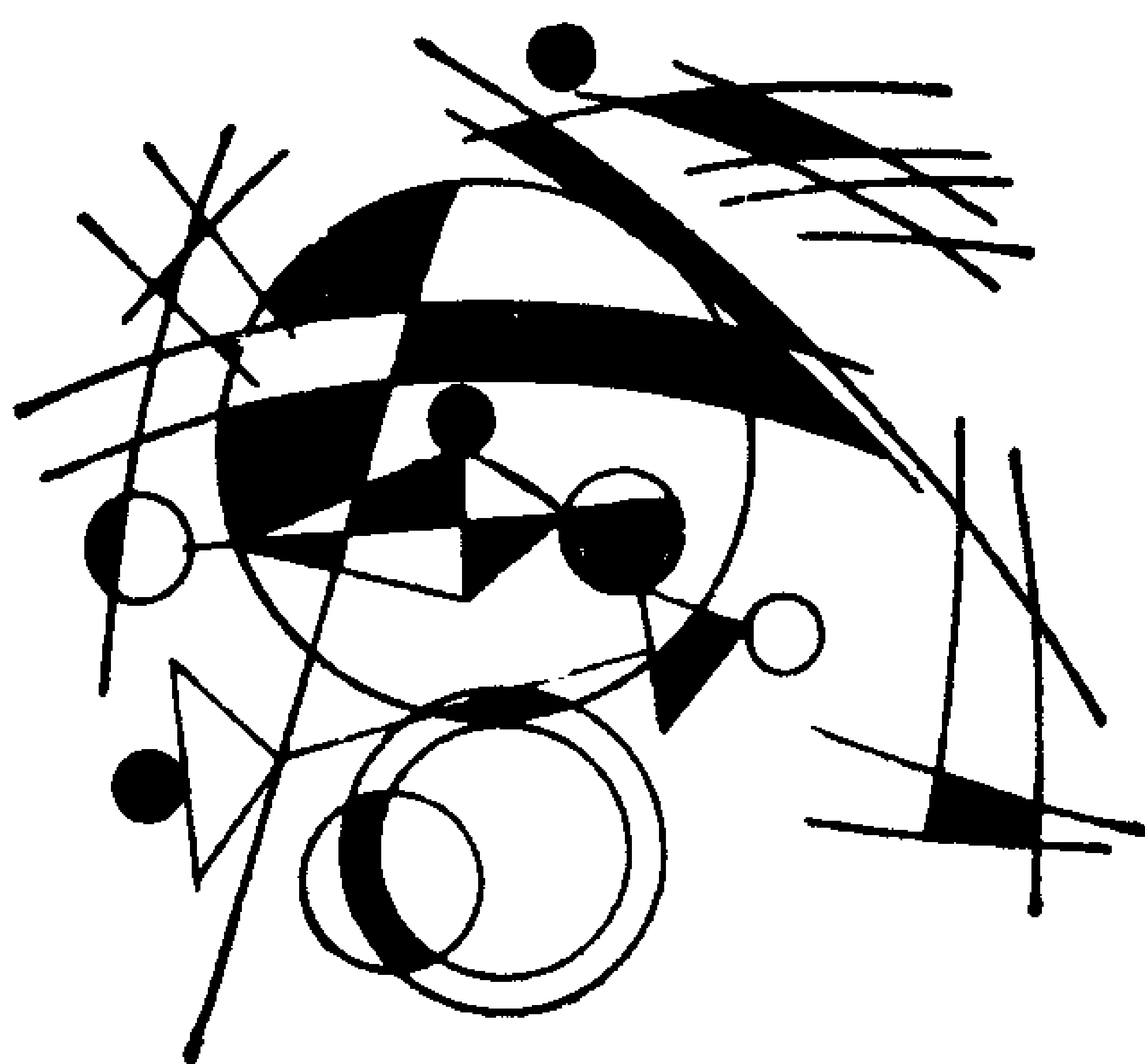
$\frac{2r+1}{b^m}$的集处处稠密。 □

推论 维尔斯特拉斯函数 $f(x)$ 的（严格意义下的）局部极大值与局部极小值点都是处处稠密的。

证明 这是因为每个上尖点都是局部极大值点，每个下尖点都是局部极小值点。

人们已经证明，第一部分第 5 节中所列举的用级数表示的诸无处可微连续函数都具有处处稠密的尖点。我们将在第七部分第 2 节中举出不具有尖点的无处可微连续函数的例子。 □

六　无处可微理论的进一步发展



1. 一类连续函数的构造

为了讨论无处可微理论的进一步发展 我们先来构造一类相当广泛的连续函数。

设 $p_k \geqslant 2$ 为给定的正整数列，$x \in [0, 1]$，其康托级数表示为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{p_1 \cdots p_k}, \quad 0 \leqslant x_k \leqslant p_k - 1 \tag{1}$$

令 $u = f(x)$ 用如下的二进小数来定义：

$$u = 0.u_1 u_2 \cdots u_k \cdots, \quad u_k = 0, 1 \tag{2}$$

其中

$$u_1 = g_1(x_1)$$

g_1是定义域为 $\{0, 1, \cdots, p_1 - 1\}$而值域为$\{0, 1\}$的任意函数。当 $k > 1$ 时，u_k 按如下方式定

义：

1）如果 $x_k=x_{k-1}=0$，或 $x_k=p_k-1$ 且 $x_{k-1}=p_{k-1}-1$，则令 $u_k=u_{k-1}$；

2）如果 $x_k=0$ 而 $x_{k-1}\neq 0$，或 $x_k=p_k-1$ 而 $x_{k-1}\neq p_{k-1}-1$，则令 $u_k=1-u_{k-1}$；

3）如果 $x_k\neq 0$ 与 p_k-1，则令

$$u_k=g_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$$

其中 g_k 是各变元 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 分别在 $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p_i-1\}$中取值而值域为$\{0,1\}$的任意$k$元函数。

易知，这样定义的 u_k 仅依赖于 x 的康托级数表示的前 k 个位标，即 u_k 是 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的某个函数

$$u_k=h_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$$

注 当 $k=1$ 时或对于 $k>1$ 的情况3）有

$$h_k(x_1,\ x_2,\ \cdots, x_k)=g_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$$

又易知，尽管某些 x 有两种康托级数表示法，但按上述方式所定义的函数 $u=f(x)$ 之值是唯一确定的。事实上，设

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x'_k}{p_1\cdots p_k}$$

是x的两种表示法，其中

$$x_k=x'_k \qquad (k<n) \tag{3}$$

$$x_n > 0,\ x_k = 0\ (k > n) \qquad (4)$$

$$x'_n = x_n - 1,\ x_k' = p_k - 1\ (k > n) \qquad (5)$$

又设按x的这两种表示法由（2）所确定的$f(x)$之值分别为

$$u = 0.\ u_1\ u_2\ \cdots u_k\ \cdots$$

$$u' = 0.\ u_1'\ u_2'\ \cdots\ u'_k\ \cdots$$

由于（2）的第k位小数仅依赖于（1）的前k个位标，故由（3）有

$$u_k = u'_k\ (k < n) \qquad (6)$$

又由（4）有

$$u_k = 1 - u_n\ (k > n)$$

于是

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{u_k}{2^k} = \frac{u_n}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1-u_n}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

同理由（5）可得

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{u'_k}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

于是由（6）即得 $u = u'$。

作为上述函数的一个特殊情况，可以这样来定义 u_k： $u_1 = 1$。当$k > 1$时，

1）如果$x_k = x_{k-1} = 0$，或$x_{k-1} = p_{k-1} - 1$ 且$x_k = p_k - 1$，则令$u_k = u_{k-1}$；

2）对于所有其它情况，令 $u_k=1-u_{k-1}$。

在这个特例中，如令$p_k=k+1(k=1,2,\cdots)$，并令

$$x=\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4}$$

$$x'=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{k-1}{k!}$$

则$x=x'$且

$$f(x)=0.111$$
$$f(x')=0.11\ 0\ 111\cdots=f(x)$$
（二进位）

下面我们就$f(x)$由（2）定义的一般情况来证明其连续性。

设$x\in[0,1)$且 x与 $f(x)$ 分别由（1）与（2）表示。我们约定，如果x有两种康托级数表示法，则取末尾各位标恒为0的那种形式。任给$\varepsilon>0$，取正整数n充分大，使得$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，并令

$$x^*=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k-1}{p_1\cdots p_k}$$

则当$x<x'<x^*$时有

$$x'=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{p_1\cdots p_k},$$

$$0 \leqslant a_k \leqslant p_k - 1$$

设$f(x')$的二进小数表示式为

$$f(x') = 0.\ u'\ u_2'\ \cdots\ u_k'\ \cdots$$

由于u_k与u'_k之值仅依赖于x与x'的康托级数表示中的前k个位标，故当$1 \leqslant k \leqslant n$时有$u_k = u'_k$，于是

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

从而 f在 x处右连续。

同理可证 f在$(0, 1]$中左连续（此时如果 x 有两种康托级数表示法，则应取末尾各位标恒为$p_k - 1$的那种形式）。

2. 无处可微性结论的加强

仔细分析一下前面的一些例子可以看出，这些例子中所构造的函数之所以不具有可微性，是由于下式成立：

$$\lim_{x' \to x+0} \frac{|f(x') - f(x)|}{x' - x} = +\infty \qquad (1)$$

$$\lim_{x' \to x-0} \frac{|f(x') - f(x)|}{x - x'} = +\infty \qquad (2)$$

下面的定理表明，在无处可微连续函数的存在性定理中，上述用（1）与（2）表征的不可微性

的结论可以加强：

定理 设$\varphi(x)$与$\psi(x)$是定义在$(0, +\infty)$上满足条件

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\psi(x)=\varphi(0)=0$$

的两个正值增函数，$f(x)$由上节（2）式定义。如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{1}{2^{n+3}}\right)}{\psi\left(\dfrac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}=+\infty \qquad (3)$$

则

$$\overline{\lim_{x'\to x+0}}\frac{\varphi(|f(x')-f(x)|)}{\psi(x'-x)}=+\infty \qquad (4)$$

$$\overline{\lim_{x'\to x-0}}\frac{\varphi(|f(x')-f(x)|)}{\varphi(x-x')}=+\infty \qquad (5)$$

分别在$[0, 1)$与$(0, 1]$中处处成立。

证明 设$x\in[0, 1)$且x与$f(x)$分别由上节中的（1）与（2）表示。我们约定，如果x有两种康托级数表示，则取末尾各位标恒为0的那种形式。于是存在任意大的正整数n，使$x_{n+1}<p_{n+1}-1$，令

$$x'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x'_k}{p_1\cdots p_k}$$

$$f(x') = 0.u'_1u'_2\cdots u'_k\cdots \text{（二进位）}$$

其中

$$x'_k = x_k,\ \text{当} 1 \leqslant k \leqslant n \tag{6}$$

$$x'_{n+1} = p_{n+1} - 1 \tag{7}$$

$$x'_{n+2} = \begin{cases} 0, & \text{如果} u'_{n+1} = u_{n+2}, \\ p_{n+2} - 1, & \text{如果} u'_{n+1} = 1 - u'_{n+2}; \end{cases} \tag{8}$$

$$x'_{n+3} = \begin{cases} 0, \\ p_{n+3} - 1, \\ p_{n+3} - 1, \\ 0, \end{cases}$$

如果$u'_{n+2} = u_{n+3}$且 $x'_{n+2} = 0$

如果$u'_{n+2} = u_{n+3}$且$x'_{n+2} = p_{n+2} - 1$

如果$u'_{n+2} = 1 - u_{n+2}$且$x'_{n+2} = 0$

如果$u'_{n+2} = 1 - u_{n+2}$且 $x'_{n+2} = p_{n+2} - 1$

（9）

当$k > n+3$时，x'_k任意。由定义易知，

$$u'_{n+2} = 1 - u_{n+2},\quad u'_{n+3} = u_{n+3} \tag{10}$$

由（10）有

$$|f(x') - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n+3}} \tag{11}$$

由（6）有

$$0 < x' - x \leqslant \frac{1}{p_1 \cdots p_n} \tag{12}$$

由φ与ψ的增加性及（11），（12）与（3）有

$$\overline{\lim_{x' \to x+0}} \frac{\varphi(|f(x') - f(x)|)}{\psi(x' - x)}$$

$$\geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right)}{\psi\left(\frac{1}{p_1 \cdots p_n}\right)} = +\infty$$

即（4）成立。

同理可证（5）在(0，1]中处处成立。□

注1 显然，如果当$x \to 0^+$时，$\varphi(x)$是关于x的高阶无穷小，而$\psi(x)$是关于x的同阶或较低阶无穷小，则结论(4)与(5)分别强于(1)与(2)。粗略地说，这时$f(x)$比通常的无处可微连续函数具有更强的皱褶性。

注2 要使(3)成立，只要使序列$\{p_n\}$增大的速度充分快即可。

3. 某些函数类中的无处可微函数

在对无处可微连续函数作进一步研究时，人们自然会提出如下问题：在具有比连续性更好的某些性质的函数类中是否存在无处可微函数？这

个问题的更一般的提法是：在具有性质A的连续函数类中是否存在处处具有性质B的函数？

在这方面的一个重要结果是奥巴哈与巴拿哈得到的，他们在〔3〕中证明：当$0<\sigma<\tau\leqslant 1$时，在满足σ阶李普希兹条件的函数类中，存在函数$f(x)$使关系式

$$\overline{\lim_{x'\to x}}\frac{|f(x')-f(x)|}{|x'-x|^{\tau}}=+\infty \tag{1}$$

处处成立。奥巴哈和巴拿哈所给出的是纯存在性证明。二十七年后，米洛斯拉夫具体构造出具有上述性质的函数（见〔34〕）。作者在〔49〕中证明，奥巴哈等人的结果可以推广为如下的普遍形式：

定理 设$\varphi(x)$与$\psi(x)$是定义在〔0，1〕上满足如下条件的正值增函数：

1° $$\lim_{x\to 0+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0+}\psi(x)=0 \tag{2}$$

2° $$\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=+\infty \tag{3}$$

3° 当x充分小时，

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\varphi(x) \tag{4}$$

则存在定义在〔0，1〕上的函数$f(x)$，使得

1） $$\omega_f(\delta)\leqslant\varphi(\delta) \tag{5}$$

此处$\omega_f(\delta)$是$f(x)$的连续模

$$\omega_f(\delta)=\sup_{|x-y|\leq\delta}\{|f(x)-f(y)|\}$$

2）$$\overline{\lim_{x'\to x+0}}\frac{|f(x')-f(x)|}{\psi(x'-x)}=+\infty \tag{6}$$

$$\overline{\lim_{x'\to x-0}}\frac{|f(x')-f(x)|}{\psi(x-x')}=+\infty \tag{7}$$

分别在〔0，1）与（0，1〕中处处成立。

注 显然，当$0<\sigma<1$时，$x^\sigma(x\geqslant0)$满足条件(4)，故只要在本定理中取$\varphi(x)=x^\sigma$，$\psi(x)=x^\tau$，就得到奥巴哈与巴拿哈的结果，并且(6)与(7)比(1)更进了一步（因为前者是单侧上极限）。

下面我们给出这个定理一个构造性的证明。设$f(x)$由第1节中的（2）式定义。我们要证明，只要适当选择康托级数中的序列$\{p_k\}$，就可使$f(x)$满足定理中的要求.分以下几个步骤来讨论：

1）如果存在常数A，使对一切n有

$$A\varphi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)\geqslant\frac{1}{2^{n-2}} \tag{8}$$

则

$$\omega_f(\delta)\leqslant A\varphi(\delta) \tag{9}$$

证明 设x与$f(x)$分别由第1节中的（1）与（2）表示，又$x'>x$，且

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x'_k}{p_1 \cdots p_k}$$

$$f(x') = 0.u'_1 u_2' \cdots u'_k \cdots \text{（二进位）}$$

则存在正整数l，使得$x'_l - x_l \geqslant 1$，而当$k<1$时，$x_k' = x_k$。设使得 $x_{l+k} - x'_{l+k} < p_{l+k} - 1$的正整数$k$ 中的最小者为m，则当$1 \leqslant k < m$时，

$$x_{l+k} = p_{l+k} - 1,\quad x'_{l+k} = 0$$

于是

$$x' - x \geqslant \frac{1}{p_1 \cdots p_{l+m}} \tag{10}$$

$$u_k = u_k' \quad (1 \leqslant k < l)$$

$$u_{l+k} = 1 - u_l,\quad u'_{l+k} = 1 - u'_l \quad (1 \leqslant k < m)$$

故不论u_l是否等于u'_l，恒有

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^{l+m-2}} \tag{11}$$

于是由（8），（10），（11）及φ 的单调性有

$$|f(x') - f(x)| \leqslant A\varphi\left(\frac{1}{p_1 \cdots p_{l+m}}\right)$$

$$\leqslant A\varphi(x' - x) \tag{12}$$

故（9）成立。 □

2）如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\psi\left(\dfrac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}=+\infty \qquad (13)$$

则（6）与（7）分别在〔0，1）与（0，1〕中处处成立。

证明 设$x\in[0,\ 1)$且x与$f(x)$分别由第1节中的（1）与（2）表示。我们约定，如果x有两种康托级数表示法，则取末尾各位标恒为0的形式。于是存在任意大的正整数n，使得$x_n<p_n-1$。令

$$x'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x'_k}{p_1\cdots p_k}$$

$$f(x')=0.u_1'u_2'\cdots u'_k\cdots\ (\text{二进位})$$

其中$x'_k(1\leqslant k\leqslant n+3)$按第2节（6）—（9）式规定，当$k>n+3$时，$x'_k$任意。于是有

$$0<x'-x\leqslant\frac{1}{p_1\cdots p_n} \qquad (14)$$

$$u'_{n+2}=1-u_{n+2},\quad u'_{n+3}=u_{n+3}$$

$$|f(x')-f(x)|\geqslant\frac{1}{2^{n+3}} \qquad (15)$$

由（14），（15）及ψ的单调性有

$$\frac{|f(x')-f(x)|}{\psi(x'-x)}\geqslant\frac{1}{2^{n+3}\psi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}$$

(16)

由（16）及（13）即可推出（6）.

同理可证（7）在$(0,1]$中处处成立. □

3）由以上的讨论知，要构造满足（6），（7）与（9）的函数$f(x)$，只要构造一个满足（8）与（13）的整数列$\{p_n\}$（$p_n\geqslant2$）即可. 下面我们来构造这样的序列：

取p_1充分大，使当$0<x<\frac{1}{p_1}$时，（4）成立. 令

$$\frac{1}{2\varphi\left(\frac{1}{p_1}\right)}=B$$

一般地，设p_n已经确定，且

$$B\leqslant\frac{1}{2^n\varphi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}\leqslant2B \tag{17}$$

由于$\varphi(u)\to0$，故存在正整数$k\geqslant2$，使得

$$\frac{1}{2^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n\cdot k}\right)}\geqslant B$$

设p_{n+1}是使上式成立的正整数 $k(k\geqslant 2)$中的最小者，如果$p_{n+1}=2$，则由（4）有

$$B\leqslant\frac{1}{2^{n+1}\varphi\left(\dfrac{1}{p_1\cdots p_{n+1}}\right)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n}\varphi\left(\dfrac{1}{p_1\cdots p_{n}}\right)}\leqslant 2B$$

如果$p_{n+1}>2$，则

$$\frac{1}{2^{n+1}\varphi\left[\dfrac{1}{p_1\cdots p_n(p_{n+1}-1)}\right]}<B \qquad (18)$$

由（4），（18）及φ的单调性有

$$\frac{1}{2^{n+1}\varphi\left(\dfrac{1}{p_1\cdots p_{n+1}}\right)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}\varphi\left[\dfrac{1}{p_1\cdots p_n(p_{n+1}-1)\cdot 2}\right]}$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n}\varphi\left[\dfrac{1}{p_1\cdots p_n(p_{n+1}-1)}\right]}<2B$$

于是，根据归纳法，一切$p_n(n=1, 2, 3, \cdots)$都可依次定义且使（17）成立。

如果取$A=8B$，则由（17）即得（8），又

由（17）及（3）有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\psi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\varphi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}$$

$$\cdot\frac{\varphi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}{\psi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}=+\infty$$

故（13）成立。

4）现在设$\{p_n\}$满足（8）与（13），$f(x)$由第1节的（2）式定义。令

$$F(x)=\frac{1}{A}f(x)$$

则由（6），（7）与（9）知，$F(x)$满足条件（5）—（7）（$F(x)$相当于其中的$f(x)$）。 □

推论 设$\varphi(x)$是定义在［0，1］上满足如下条件的增函数：

1° $\lim\limits_{x\to0+}\varphi(x)=0$

2° $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{\varphi(x)}=0$

则可以构造出定义在［0，1］上的连续函数

$f(x)$，使得

1）$\omega_f(\delta)\leqslant\varphi(\delta)$；

2）$f(x)$处处不存在有限的单侧导数。

证明 令

$$\lambda(x)=\max_{0<t<x}\left\{\frac{t}{\varphi(t)}\right\}$$

$$\Phi(x)=\frac{x}{\lambda(x)}$$

则$\dfrac{x}{\Phi(x)}=\lambda(x)$为增函数，于是有

$$\frac{\frac{x}{2}}{\Phi\left(\frac{x}{2}\right)}\leqslant\frac{x}{\Phi(x)}$$

由此知

$$\Phi\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\Phi(x)$$

即$\Phi(x)$满足（4），又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\Phi(x)}=\lim_{x\to0^+}\lambda(x)=0$$

故由定理知（取$\psi(x)=x$），可以定义在〔0，1〕上的连续函数$f(x)$，使得

$$\omega_f(\delta)\leqslant\Phi(x) \tag{19}$$

且$f(x)$处处不存在有限的单侧导数，又因为，

$\lambda(x) \geqslant \dfrac{x}{\varphi(x)}$，故

$$\varphi(x) \geqslant \frac{x}{\lambda(x)} = \Phi(x)$$

于是由（19）有

$$\omega_f(\delta) \leqslant \varphi(\delta) \qquad \square$$

注 设 $f(x)$ 是定义在〔0，1〕上的正值增函数，$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$，$H(\varphi)$ 表示定义在〔0，1〕上满足条件

$$\omega_f(\delta) \leqslant \varphi(\delta)$$

的函数 $f(x)$ 所组成的类，我们知道，如果 $\varphi(x)$ 是一阶无穷小（$x\to 0$），则 $H(\varphi)$ 中的函数满足李普希兹条件，因而是几乎处处可微的．而上述推论表明，只要 $\varphi(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小，则 $H(\varphi)$ 中存在处处不可微的连续函数．显然，这一结果比无处可微的连续函数的存在性要深刻得多．

4．贝西科维茨函数

本节中我们从另一角度来考虑无处可微理论的一种发展。

前面我们曾指出，历史上的一些著名的无处可微函数都具有处处稠密的尖点。虽然我们将在第七部分第2节中构造出没有尖点的无处可微连

续函数，但可以证明，这些函数仍在某些点处具有无穷的右导数或左导数。人们自然要问：是否存在处处不存在有限或无限单侧导数的连续函数？

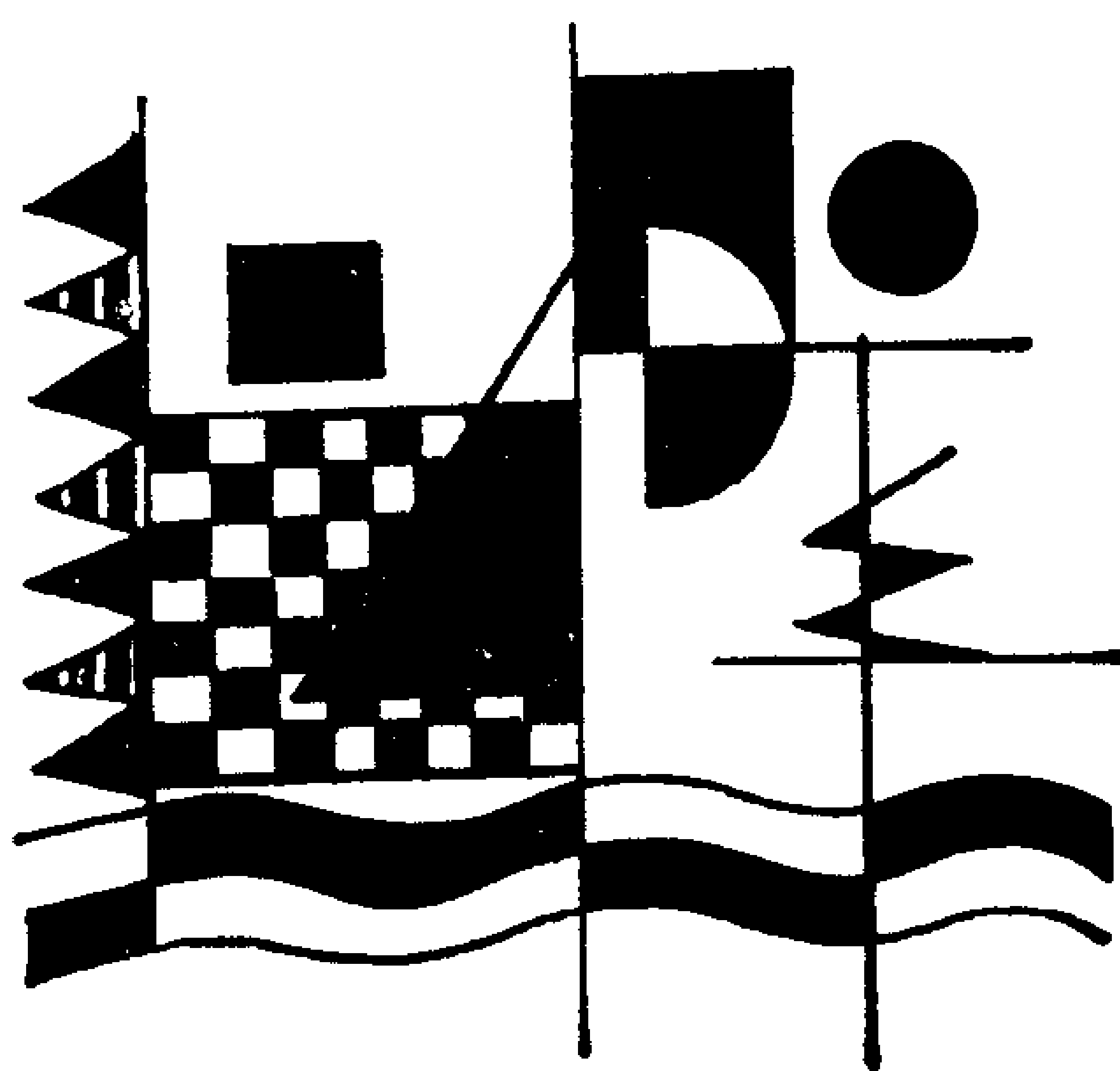
试图在肯定意义下回答这个问题的第一人是贝西科维茨，他于1925年构造出一条曲线（见〔6〕），按照他的陈述，这条曲线处处不存在半切线（即相应的函数不存在有限或无限的单侧导数）。但实际情况是，贝西科维茨所构造的曲线虽然确实表示无处可微连续函数，但他给出的关于曲线不具有半切线的证明依赖于几何直观，它的有效性是成问题的。

1928年培帕用几何方法构造出另一个例子（见〔37〕），但他的证明存在同样的问题。

1939年摩尔斯的论文〔35〕最终解决了上述问题。在这篇论文中，摩尔斯用分析方法构造出一个连续函数，并严格地证明它处处不存在有限或无限的单侧导数。自然，摩尔斯例子的构造和证明都是十分复杂的。有兴趣的读者除直接阅读他的论文外，也可参看〔9〕。

处处不可微的连续函数通常统称为维尔斯特拉斯函数，而处处不存在有限或无限单侧导数的连续函数则称为贝西科维茨函数。

七 与无处可微连续函数有关的某些论题



1. 皮亚诺曲线

直到十九世纪中叶，曲线一直是作为几何学中自明的原始概念使用的。从十九世纪后半期对数学各个分支的基础进行严密化以来，对于曲线的概念也要求有明确的定义。最初作这种尝试的是约当，他所给出的平面曲线的定义是：

一条平面曲线是平面上那些其坐标 x和 y 由方程式

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

所给定的点的集合，在这里 φ和 ψ是定义在区间[0,1]上的任意两个连续函数。

现在我们称以上定义的曲线为连续曲线或约当曲线。

按照几何直观，曲线只有长度，没有宽度和厚度，由此推想，觉得恐怕不会有任何曲线能够填满一整块面积。但意大利数学家皮亚诺却在1890年指出，存在定义在区间〔0，1〕上的两个连续函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，使得所有坐标适合方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$的点填满一整块正方形（包括其内点和边界点在内），也就是说，无论取正方形中的哪一个点 $P(x, y)$，总可以找到这样的参数值 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，使

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

皮亚诺的发现曾引起数学界的惊异，并且很快又找到另外一些具有这种性质的曲线的例子。所有这些填满正方形的连续曲线，不论是谁作出的，都叫做皮亚诺曲线，因为皮亚诺最先发现了这种曲线的存在。

本节的目的是要指出皮亚诺曲线和无处可微连续函数的某些联系，即我们要证明存在定义在〔0,1〕上的无处可微连续函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$，使得曲线

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

填满整个单位正方形。具有这种性质的曲线称为无处可微的皮亚诺曲线。

例　设$b\geqslant 6$为整数，B是小于$b-1$的正整数的集，D是小于 b的非负整数的集，且

$$B=B_{k1}\cup B_{k2}\cup B_{k3}\cup B_{k4}\quad(k=2,3,4,\cdots)$$

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$$

其中B_{k1}，B_{k2}，B_{k3}，B_{k4} 均非空且互不相交，诸D_i也非空且互不相交。设 $t\in[0,1]$且其 b进小数表示为

$$t=0.t_1t_2\cdots t_k\cdots$$

利用二进小数定义函数$\varphi(t)$与$\psi(t)$如下：

$$\varphi(t)=0.x_1x_2\cdots x_k\cdots\text{（二进位）}$$

$$\psi(t)=0.y_1y_2\cdots y_k\cdots\text{（二进位）}$$

其中

$$x_1=\begin{cases}0, & \text{如果}t_1\in D_1\cup D_2\\ 1, & \text{如果}t_1\in D_3\cup D_4\end{cases}$$

$$y_1=\begin{cases}0, & \text{如果}t_1\in D_1\cup D_3\\ 1, & \text{如果}t_1\in D_2\cup D_4\end{cases}$$

当$k>1$时，

$$x_k=\begin{cases}x_{k-1}, & \text{如果}t_k=0\text{或}b-1\text{且}t_k=t_{k-1}\\ 1-x_{k-1}, & \text{如果}t_k=0\text{或}b-1\text{且}t_k\neq t_{k-1}\\ 0, & \text{如果}t_k\in B_{k1}\cup B_{k2}\\ 1, & \text{如果 }t_k\in B_{k3}\cup B_{k4}\end{cases}$$

$$y_k=\begin{cases} y_{k-1}, & \text{如果} t_k=0 \text{或} b-1 \text{且} t_k=t_{k-1} \\ 1-y_{k-1}, & \text{如果 } t_k=0 \text{或 } b-1 \text{且 } t_k\neq t_{k-1} \\ 0, & \text{如果 } t_k\in B_{k1}\cup B_{k3} \\ 1, & \text{如果 } t_k\in B_{k2}\cup B_{k4} \end{cases}$$

由第三部分第2节中的一般性结论可知，以上定义的$\varphi(t)$与$\psi(t)$都是处处不存在有限单侧导数的连续函数。容易证明

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

是一条皮亚诺曲线。

事实上，设 x与 y是〔0,1〕中的任意实数，其二进小数表示分别为

$$x=0.x_1x_2\cdots\ x_k\ \cdots,\quad x_k=0\text{或}1$$

$$y=0.y_1y_2\ \cdots\ y_k\ \cdots,\quad y_k=0\text{或}1$$

令

$$t_1\in\begin{cases} D_1, \text{如果 } x_1=0,\ y_1=0 \\ D_2, \text{如果 } x_1=0,\ y_1=1 \\ D_3, \text{如果 } x_1=1,\ y_1=0 \\ D_4, \text{如果 } x_1=1,\ y_1=1 \end{cases}$$

当$k>1$时，

$$t_k\in\begin{cases} B_{k1}, \text{如果 } x_k=0,\ y_k=0 \\ B_{k2}, \text{如果 } x_k=0,\ y_k=1 \\ B_{k3}, \text{如果 } x_k=1,\ y_k=0 \\ B_{k4}, \text{如果 } x_k=1,\ y_k=1 \end{cases}$$

现在设 t是一个实数，其 b进小数表示为

$$t=0.t_1t_2\ \cdots\ t_k\ \cdots$$

则由定义立即有

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

故曲线通过单位正方形中的每一点。

2. 局部循环函数

布什于1962年引进局部循环函数的概念：函数$f(x)$称为在 x处局部循环，如果在 x的每个邻域内都存在一个异于x的点x'，使得$\varphi(x')=\varphi(x)$(见[13])。随后不少作者对这种函数进行了系统的研究(见[28]-[31])。另一方面，在本书第六部分第 2 节中我们构造了一类连续函数，这类连续函数具有另一种类型的局部性质。下面我们要构造同时具有这两种奇特局部性质的连续函数。

定理 设$\varphi(x)$与$\psi(x)$是定义在$(0,\ +\infty)$上满足条件

$$\lim_{x\to 0+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0+}\psi(x)=\varphi(0)=0$$

的任两个正值增函数，则存在定义在$[0,\ 1]$上的一个局部循环连续函数$f(x)$，使得

$$\overline{\lim_{x'\to x+0}}\frac{\varphi(|f(x')-f(x)|)}{\psi(x'-x)}=+\infty \quad (1)$$

$$\overline{\lim_{x'\to x-0}}\frac{\varphi(|f(x')-f(x)|)}{\psi(x-x')}=+\infty \quad (2)$$

分别在$[0,1)$与$(0,1]$中处处成立。

证明 设$p_k\geqslant 6$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 为正整数，B_k是小于p_k-1的正整数的集，且

$$B_k=B_{k1}\cup B_{k2}\cup B_{k3}\cup B_{k4}$$

其中B_{k1}，B_{k2}，B_{k3}，B_{k4} 非空且互不相交，又设$x\in[0,1]$其康托级数表示为

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{p_1\cdots p_k},\quad 0\leqslant x_k\leqslant p_k-1 \quad (3)$$

用二进小数定义$u=f(x)$如下：

$$u=0.u_1\ u_2\ \cdots\ u_k\ \cdots,\quad u_k=0,\ 1 \quad (4)$$

其中$u_1=1$.当$k>1$时，u_k按如下方式定义：

1） $u_k=\begin{cases}0, & \text{如果 } x_k\in B_{k1}\cup B_{k2}\\ 1, & \text{如果 } x_k\in B_{k3}\cup B_{k4}\end{cases}$

2）如果$x_k=x_{k-1}=0$，或$x_k=p_k-1$，$x_{k-1}=p_{k-1}-1$，则令$u_k=u_{k-1}$；

3）如果$x_k=0$而 $x_{k-1}\neq 0$，或$x_k=p_k-1$而$x_{k-1}\neq p_{k-1}-1$，则令$u_k=1-u_{k-1}$。

由第六部分第1节中的讨论知，以上定义的函数是连续的。容易证明，$f(x)$ 在$[0,1]$上处处

局部循环。事实上，设$x\in[0,1]$，且x与$f(x)$分别由(3)与(4)表示，n是任意大的正整数。取

$$x'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x'_k}{p_1\cdots p_k},\quad 0\leqslant x'_k\leqslant p_k-1 \qquad (5)$$

其中

$$x'_k=x_k,\quad 当\ 1\leqslant k\leqslant n$$

当$k>n$时，

$$x'_k\in\begin{cases}B_{k1}, 如果u_k=0且x_k\notin B_{k1}\\ B_{k2}, 如果u_k=0且x_k\notin B_{k2}\\ B_{k3}, 如果u_k=1且x_k\notin B_{k3}\\ B_{k4}, 如果u_k=1且x_k\notin B_{k4}\end{cases} \qquad (6)$$

由（5）易知，

$$0<|x'-x|<\frac{1}{p_1\cdots p_n} \qquad (7)$$

设 f在 x'处的值为

$$f(x')=0.u'_1\ u'_2\ \cdots\ u'_k\ \cdots\ (二进位)$$

由于u_k与u'_k分别仅依赖于x与x'的康托展式的前k个位标，故由（5）有

$$u'_k=u_k,\quad 当1\leqslant k\leqslant n$$

由（6）知，当$k>n$时仍有 $u'_k=u_k$。从而

$$f(x')=f(x) \qquad (8)$$

由于 n可任意大，故由（7）知，x' 可任意接近x，且$x'\neq x$。于是由(8)知，f在 x 处局部循环。

由第六部分第 2 节中的讨论知，要使（1）和（2）成立，只要使$\{p_n\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right)}{\psi\left(\frac{1}{p_1\cdots p_n}\right)}=+\infty$$

为此只要使$\{p_n\}$增加的速度充分快即可。 □

注 如果当$x\to0^+$时，$\varphi(x)$是关于 x的同阶或高阶无穷小，而 $\psi(x)$是关于x的同阶或低阶无穷小，则得到无处可微的连续函数，显然局部循环性使这个函数不可能有尖点，也不可能具有无穷导数。

3. 局部周期函数

在布什工作之后，作者在〔56〕中引进了局部周期函数的概念：

定义 1 设$f(x)$是实变实值函数，x_0是$f(x)$的定义域中任一点，如果对于 x_0 的任意邻域 $\sigma(x_0)$，都存在一个相应的闭区间 δ 及非零实数 r，使$x_0\in\delta\subset\sigma(x_0)$，$\delta+r\subset\sigma(x_0)$（$\delta+r$ 表示一切形如$x+r$的点的全体，其中$x\in\delta$），且

$$f(x+r)=f(x),\quad x\in\delta$$

则称$f(x)$为局部周期函数。

显然局部周期函数是一种特殊的局部循环函数。

定义 2 设$f(x)$是定义在〔a, b〕上的实值函数，如果存在正整数 l（固定）及任意大的正整数N，使当〔a, b〕被等分为N个长为$d_N=\dfrac{b-a}{N}$的区间σ_1, σ_2, …, σ_N时，对每个i ($1\leqslant i\leqslant N$)，等式

$$f(x+ld_N)=f(x)$$

和

$$f(x-ld_N)=f(x)$$

中必有一式对σ_i中的一切 x成立，则称$f(x)$为一致局部周期函数。

显然，一致局部周期函数是一种特殊的局部周期函数。

下面我们要用几何方法来构造一个处处单侧不可微的连续一致局部周期函数。

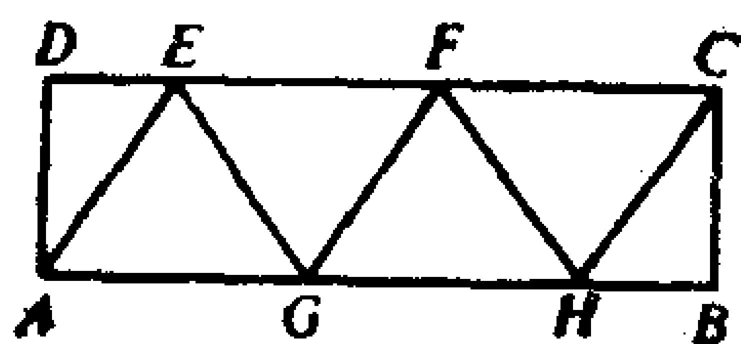


图6.1

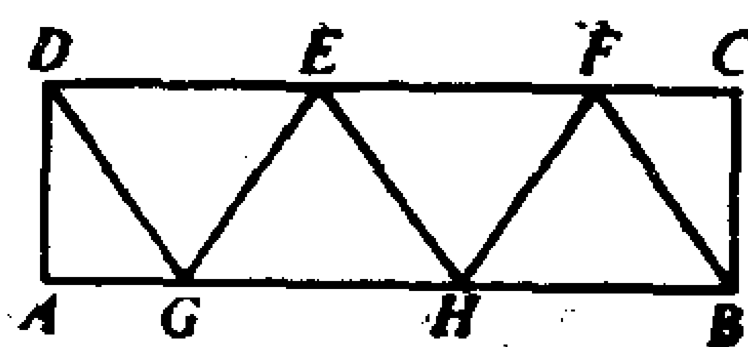


图6.2

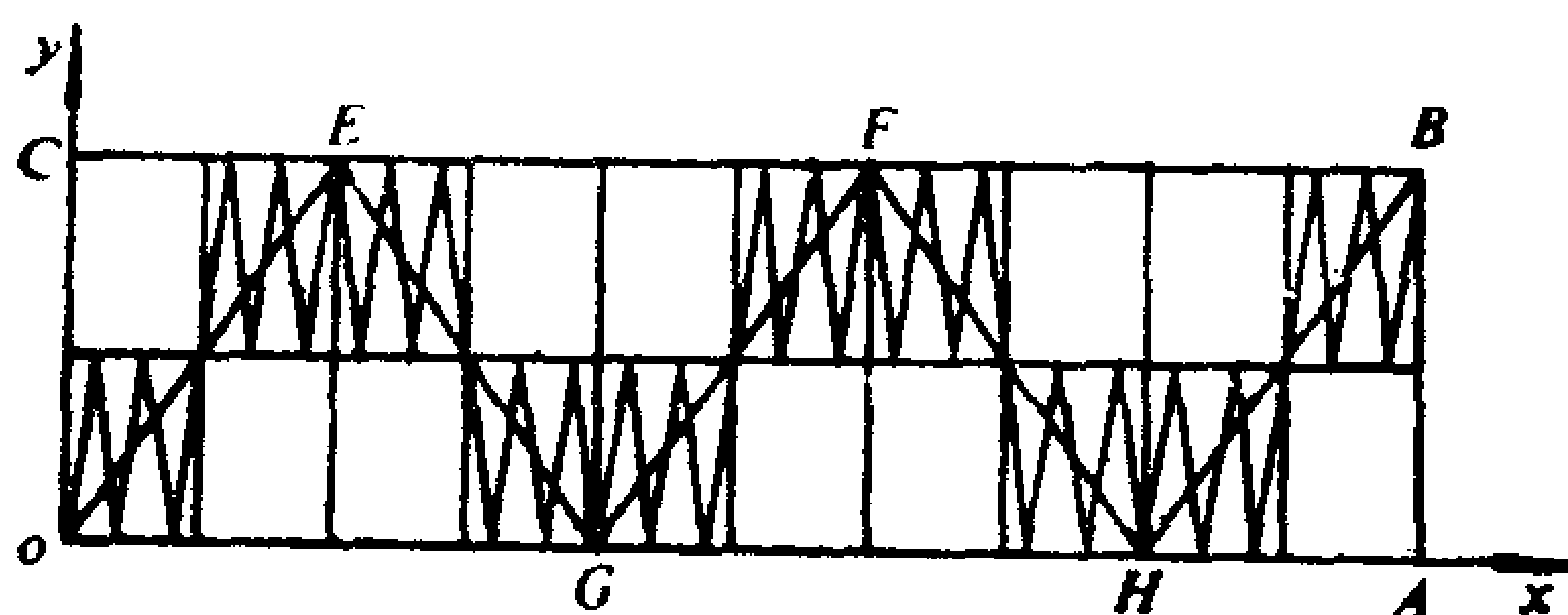


图6.3

在图6.1与图6.2中，$ABCD$ 是任一矩形，E、F与G、H分别为上下两边的五等分点。在图6.1中，连接A、E、G、F、H、C的折线称为Ⅰ型折线；在图6.2中，连接D、G、E、H、F、B、的折线称为Ⅱ型折线。在图6.3的底边为1，高为h的矩形$OABC$中，作Ⅰ型折线$OEGFHB$，并称之一阶折线，构成这折线的五个直线段都称为一阶线段。$OABC$则称为一阶矩形。

设n阶折线、n阶线段及n阶矩形都已定义，将每个n阶线段二等分，所得到的两个线段称为二分n阶线段。以每个二分n阶线段为对角线作一个各边分别平行于x轴与y轴的矩形，称$n+1$阶矩形。如果二分n阶线段的斜率大于0，则在所得$n+1$阶矩形中作Ⅰ型折线；如果二分n阶线段的斜率小于0，则在所得$n+1$阶矩形中作Ⅱ型折线。所有这些折线连成的折线称为$n+1$阶折线，构成$n+1$阶折线的直线段都称为$n+1$阶线段，以

此类推．设 n阶折线所表示的函数为 $f_n(x)$．易知$f_n(x)$是分段线性的连续函数，且

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\frac{h}{2^n} \quad (1)$$

这是因为$n+1$阶矩形的高为 $\frac{h}{2^n}$，对角线为二分n阶线段，而$n+1$阶折线由位于这些矩型中的 I 型或 II 型折线连接而成．

将[0,1]等分为 5 个区间，依次记为$\delta_{x_1}(x_1=1,2,\cdots,5)$，这些区间都称为一阶区间．设 $\delta_{x_1\cdots x_n}$是 n阶区间($x_1=1,2,\cdots,5$；$x_i=1,2,\cdots,10$；$i=2,3,\cdots,n$)．将每个 $\delta_{x_1\cdots x_n}$等分为10个区间，依次记为$\delta_{x_1\cdots x_n x_{n+1}}$ ($x_{n+1}=1,2,\cdots,10$)，这些区间都称为$n+1$阶区间，依此类推．易知 n阶区间的长度为$\lambda_n=\frac{2}{10^n}$．由各阶折线的作法知，

当$1\leqslant x_{n+1}\leqslant 3$ 或 $6\leqslant x_{n+1}\leqslant 8$时，$f_m(x)(m>n)$的图形在 $\delta_{x_1\cdots x_n(x_{n+1}+2)}$($x_{n+1}+2$ 为第 $n+1$ 个足标）上的部分可由在 $\delta_{x_1\cdots x_n x_{n+1}}$上的部分向右平移$2\lambda_{n+1}$而得；当$3\leqslant x_{n+1}\leqslant 5$ 或$8\leqslant x_{n+1}\leqslant 10$ 时，$f_m(x)(m>n)$的图形在 $\delta_{x_1\cdots x_n(x_{n+1}+2)}$ ($x_{n+1}-2$为第 $n+1$个足标）上的部分可由在 $\delta_{x_1\cdots x_n x_{n+1}}$ 上的部分向左平移 $2\lambda_{n+1}$ 而得．于是当 $m>n$,

$x \in \delta_{x_1 \dots x_n \ x_{n+1}}$ 时有

$$f_m(x) = \begin{cases} f_m(x + 2\lambda_{n+1}), \text{如果 } 1 \leqslant x_{n+1} \leqslant 3 \\ \qquad \text{或} 6 \leqslant x_{n+1} \leqslant 8 \\ f_m(x - 2\lambda_{n+1}), \text{如果 } 3 \leqslant x_{n+1} \leqslant 5 \\ \qquad \text{或 } 8 \leqslant x_{n+1} \leqslant 10 \end{cases} \tag{2}$$

由（1），对于任意的正整数n与m有

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{h}{2^{n+k-1}} < \frac{h}{2^{n-1}}$$

故 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于一个连续函数 $f(x)$。由（2）知，当$x \in \delta_{x_1 \dots x_n \ x_{n+1}}$时有

$$f(x) = \begin{cases} f(x + 2\lambda_{n+1}), \text{如果 } 1 \leqslant x_{n+1} \leqslant 3 \\ \qquad \text{或} 6 \leqslant x_{n+1} \leqslant 8 \\ f(x - 2\lambda_{n+1}), \text{如果 } 3 \leqslant x_{n+1} \leqslant 5 \\ \qquad \text{或} 8 \leqslant x_{n+1} \leqslant 10 \end{cases} \tag{3}$$

由（3）立即推知，$f(x)$ 是一致局部周期函数（取$N = \dfrac{10^{n+1}}{2} = n+1$阶区间的总数，$d_N = \lambda_{n+1}$，$l = 2$）。

下面我们来证明$f(x)$处处不存在有限的单侧导数。

易知，对于任何整数$0\leqslant k\leqslant\frac{10^n}{2}$有

$$|f[(k+1)\lambda_n]-f(k\lambda_n)|=|f_n[(k+1)\lambda_n]-f_n(k\lambda_n)|=\frac{h}{2^{n-1}} \qquad (4)$$

今设x是[0,1)中任一点，且

$$(k_n-1)\lambda_n\leqslant x<k_n\lambda_n \qquad (5)$$

其中k_n为正整数$\left(0<k_n\leqslant\frac{10^n}{2}\right)$，由（5）有

$$0<k_n\lambda_n-x<(k_n+1)\lambda_n-x<2\lambda_n \qquad (6)$$

由于$\lambda_n=\frac{2}{10^n}$，故由（4）有

$$r_n=\frac{|f[(k_n+1)\lambda_n]-f(k_n\lambda_n)|}{\lambda_n}=5^nh \qquad (7)$$

由（6）有

$$r_n\leqslant\frac{|f[(k_n+1)\lambda_n]-f(x)|}{\lambda_n}+\frac{|f(k_n\lambda_n)-f(x)|}{\lambda_n}$$

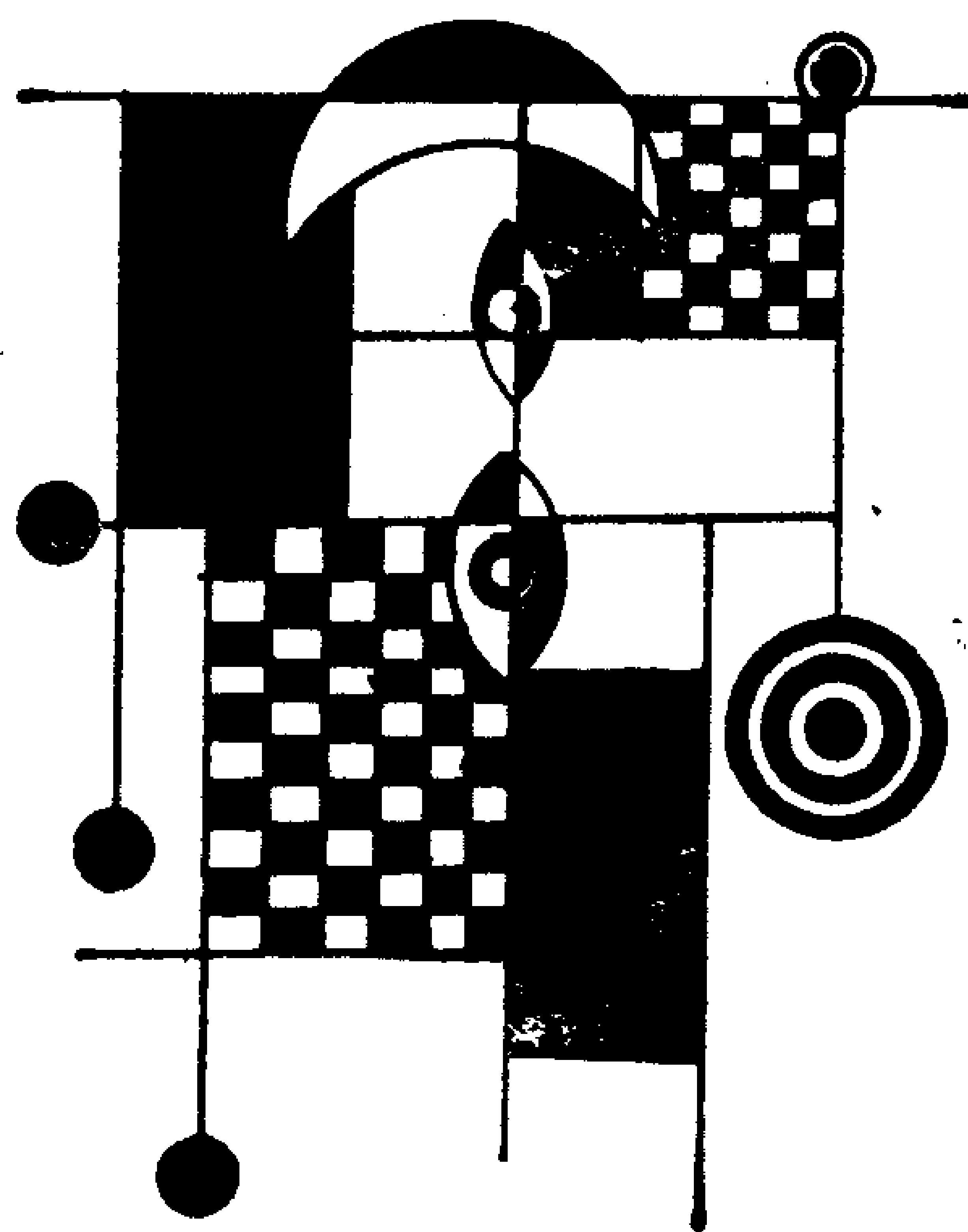
$$\leqslant\frac{2|f[(k_n+1)\lambda_n]-f(x)|}{(k_n+1)\lambda_n-x}$$

$$+\frac{2\left|f(k_n\lambda_n)-f(x)\right|}{\lambda_n} \qquad (8)$$

由（8）知，如果 f在 x处具有有限的右导数，则$\{r_n\}$有界，这与（7）矛盾。故f在 x处不存在有限的右导数。

同理可证 $f(x)$在$(0,1]$中处处不存在有限的左导数。

八 无处可微连续函数类的范畴



1. 基本拓扑概念

为讨论无处可微连续函数类的一个重要的拓扑性质，我们先对所需的准备知识作一简单介绍。

定义1 设X是一个非空集，如果对于X中的任一对元素x和y，有一个实数$\rho(x, y)$与之对应，且$\rho(x, y)$具有以下性质：

1° $\rho(x, y) \geqslant 0$，且当且仅当$x = y$时，$\rho(x, y) = 0$；

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$；

3° $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$，

则称X为度量空间，称$\rho(x, y)$为元素x与y的距离，而称不等式3°为三角不等式。为了强调与ρ

的关系，也将上述度量空间记为 (X, ρ).

例 1 设X是任意区间，当$x, y\in X$时，令

$$\rho(x, y) = |x-y|$$

则(X, ρ)是度量空间。

例 2 设R^n是所有有序n元数组

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的集，其中x_1, x_2, …, x_n是实数，称为x的坐标。若

$$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

是另一个有序n元实数组，我们定义x与y的距离为

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, x, y\in R^n$$

则R^n是度量空间（即n维欧氏空间），其中的三角不等式为

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

当$n=1$, 2时，R^n就是具有通常定义之距离的数直线与数平面。

定义 2 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是度量空间(X, ρ)中的

点列，若存在$x\in X$，使

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x)=0$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在(X, ρ)中收敛，记为$x_n\to x$或

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

并称x为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限，也称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x。

易证若点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在度量空间中收敛，则其极限是唯一的。

定义 3 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是度量空间(X, ρ)内的点列。若对任意的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使对所有$m, n\geqslant N$有$\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为$(X, \rho)$内的柯西序列。

定义 4 若度量空间(X, ρ)内的柯西序列都在(X, ρ)内收敛，则称(X, ρ)为完备度量空间。

例 3 设$C[a, b]$是定义在区间$[a, b]$上的连续实值函数之集。若$f, g\in C[a, b]$，我们定义f与g的距离为

$$\rho(f, g)=\sup_t\{|f(t)-g(t)|: t\in[a, b]\}$$

则$C[a, b]$是完备度量空间，并且按这个度量的收敛就是一致收敛。

例 4 按照例 1 中定义的距离，有限闭区间$[a, b]$是完备度量空间。

定义 5 设(X,ρ)是度量空间．任给$x_0\in X$及$r>0$，X内满足$\rho(x_0, x)<r$的所有点x之集叫做(X, ρ)内的开球，记为$S(x_0, r)$．x_0叫做球心，r叫做球半径．(X,ρ)内以x_0为球心的任意开球叫做x_0的邻域．

定义 6 设(X, ρ)是度量空间，若$Y\subseteq X$，$x_0\in Y$且存在x_0的某个邻域整个地含于Y，则称x_0是Y的内点．

定义 7 设(X, ρ)是度量空间，$Y\subset X$，$x_0\in X$．若x_0的每个邻域都至少含有Y的一个异于x_0的点，则称x_0为Y的极限点．

定理 1 设(X, ρ)是度量空间，$Y\subset X$．当且仅当存在Y的不同点的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$使$x_n\to x_0$时，x_0是Y的极限点．

定义 8 设(X, ρ)是度量空间．$Y\subset X$．若Y的点都是Y的内点，则称Y是(X, ρ)的开集．

定义 9 设(X,ρ)是度量空间，$Y\subset X$．若Y的余集$X-Y$是(X, ρ)内的开集，则称Y为(X, ρ)内的闭集．

定理 2 设(X,ρ)是度量空间，$Y\subset X$．则当且仅当Y含有它自己的所有极限点时Y是闭集．

定义10 设(X, ρ)是度量空间．$Y\subset X$．由

Y及其所有极限点一起构成的集叫Y的闭包，记为$\overline{Y}$。

由定理2易知，当且仅当$Y=\overline{Y}$时Y是闭集。

定义11 设(X,ρ)是度量空间．$Y\subset X$．若$\overline{Y}=X$，则称Y（在X中）处处稠密。

例如，所有有理点的集在实数轴R^1中处处稠密。

定义12 设(X,ρ)是度量空间。集$Y\subset X$叫做(X,ρ)的无处稠密集，若$\overline{Y}$没有内点。集$F\subset X$叫做第一范畴集，若F是无处稠密集的可数并集．X的不是第一范畴的子集叫做第二范畴集．

定理3 （贝尔范畴定理）完备度量空间（作为它自己的子集）是第二范畴集。

定理1—3的证明参见〔22〕第五章。

2．巴拿哈定理

以下的定理及推论给出无处可微连续函数存在性的一种间接证明。它事实上表明，在某种意

义下绝大多数连续函数都是无处可微的。

定理 1 （巴拿哈，1931）设$C[0, 1]$是定义在区间$[0, 1]$上的实值连续函数的全体。令$H=\{f \mid f\in C[0, 1]$，且存在$x\in[0,1)$使$D^+f(x)$与$D_+f(x)$均有限$\}$，则H是$C[0, 1]$中的第一范畴集。

证明 对于每个整数 $n>1$，令 H表示存在$x_0\in\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$使

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{h}\leqslant n \qquad (1)$$

对一切 $h\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$成立的$f\in C[0, 1]$的全体。

我们首先证明

$$H=\bigcup_{n=2}^{\infty}H_n \qquad (2)$$

$\bigcup_{n=2}^{\infty}H_n\subset H$是显然的。设$f\in H$，则存在$x\in[0, 1)$及常数$a$，使得对某个$\delta\in(0, 1-x)$不等式

$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}<a$$

对一切$h\in(0, \delta)$成立。取正整数$n>\max\left\{\frac{1}{\delta},\right.$

$\alpha\}$，则显然有 $f\in H_n$，因而有$H\subset\bigcup_{n=2}^{\infty}H_n$，故(2)成立。

下面我们证明每个H_n是$C[0,1]$中的闭集。为此固定n，设$f\in\overline{H}_n$。在 H_n 中选取函数序列$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$使 $f_m\to f$（即 f_m在$[0,1]$上一致收敛于 f）。由 H_n的定义知，对每个 m，存在 $x_m\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$使$\varphi_m(x)$在 x_m处满足（1）（即令$f=f_m$，$x_0=x_m$ 时，（1）对一切$h\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$成立）。由波尔察诺-维尔斯特拉斯收敛原理知，存在$\{x_m\}$的子列收敛于$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$中的某点$x_0$，$\{f_m\}$的对应子列仍在$C[0,1]$中收敛于$f$；为简单起见，仍分别将这两个子序列记为$\{x_m\}$与$\{f_m\}$。设 $h\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$是任意固定的正数，因为$\{f_m\}$在$[0,1]$上一致收敛于$f$，又$\{x_m\}$收敛于$x_0$，故有

$$\lim_{m\to\infty}|f_m(x_m+h)-f_m(x_m)|=|f(x_0+h)-f(x_0)|$$

于是在不等式

$$\frac{|f_m(x_m+h)-f_m(x_m)|}{h}\leqslant n$$

中令$m\to\infty$得

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{h}\leqslant n$$

故$f\in H_n$，因而H_n是闭集。

现在我们证明H_n是无处稠密的，即对于任给的$g\in H_n=\overline{H}_n$和$\varepsilon>0$，存在$f\in C[0,1]$，使得$\rho(f,g)<\varepsilon$（此处ρ为$C[0,1]$中的距离）且$f\notin H_n$。属于$C[0,1]$而不属于H_n的函数的典型例子是"锯齿"形函数（图8.1）。对于上述的g和ε，我们能找到这样的一个"锯齿"形函数f，使组成它的每一根线段的斜率的绝对值都大于n，且$f(x)$的图形位于以曲线$y=g(x)$为中心线、宽度为2ε的带形区域中，如图8.2所示。这样的f就满足上述条件$f\notin H_n$且$\rho(f,g)<\varepsilon$。于是我们就证明了H_n是无处稠密的，因而H是$C[0,1]$中的第一范畴集。

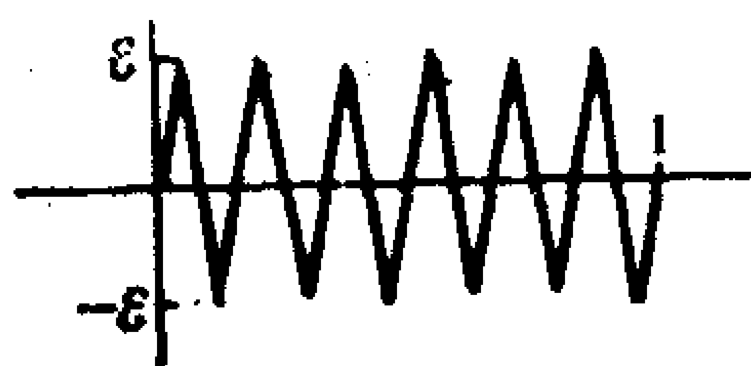


图8.1

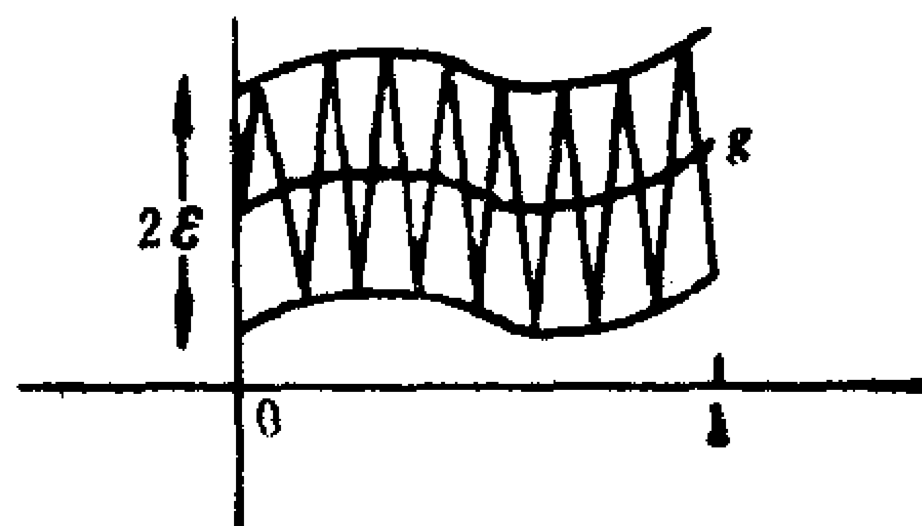


图8.2

上述定理的进一步推广见〔52〕.

推论 存在一个连续实值函数 $f\in C[0,1]$，使得

$$\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}=+\infty \quad (3)$$

$$\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{|f(x-h)-f(x)|}{h}=+\infty \quad (4)$$

分别在〔0，1）与（0，1〕中处处成立。

证明 令

$G=\{f\mid f\in C[0,1]$，且存在$x\in(0,1]$使$D^{-}f(x)$与$D_{-}f(x)$均有限$\}$，仿照定理1可证G也是$C[0,1]$中的第一范畴集，因而$H\cup G$是$C[0,1]$中的第一范畴集。设A是使（3）与（4）分别在〔0，1）与（0，1〕中处处成立的所有函数$f\in C[0,1]$的集，则A显然是$H\cup G$的余集，即$A=C[0,1]-H\cup G$。由于$C[0,1]$是第二范畴集，故A是第二范畴集（因为 $C[0,1]=A\cup(H\cup G)$ 而两个第一范畴集之并集不可能是第二范畴集），因而A非空。 □

上述定理和推论中所用的方法是很重要的，在分析学和拓扑学中经常用这个方法来证明具有特定性质的函数的存在。

粗略地说，在完备度量空间中，“第一范

畴”的概念具有“稀薄”的直观意义，因此上述巴拿哈定理在直观上表示，绝大多数的连续函数都是无处可微的。

作为对照，我们来考虑贝西科维茨函数类的范畴。1932年沙克斯在〔40〕中证明了如下

定理 2 区间〔0，1〕上的贝西科维茨函数的全体是C〔0，1〕中的第一范畴集。

这个定理表明，绝大多数连续函数都不是贝西科维茨函数，也就是说，贝西科维茨函数比维尔斯特拉斯函数要希罕得多。实际情况也是如此：如我们所见到的，已有大量的维尔斯特拉斯函数的例子；然而，就作者所知，迄今为止，贝西科维茨函数的例子只有3个，即前面提到的贝西科维茨、培帕和摩尔斯所构造的例子。

九 结 束 语



无处可微连续函数的发现和研究是和波尔察诺、柯西、维尔斯特拉斯等人给分析提供严密性的工作联系在一起的。这些工作把数学分析从对几何概念、运动和直觉了解的完全依赖中解放出来，它一开始就造成了巨大的轰动。

和数学中一切新运动一样，关于无处可微连续函数也有过很多争论。在当时，这种函数被攻击为奇怪而无意义的函数，它们被看成是一种变态或是函数的不健康部分，它们还被认为在纯粹数学和应用数学的重要问题中是不会出现的。

持这种观点的不乏当时的著名数学家。例如庞加莱说："半个世纪以来我们已经看到了一大堆离奇古怪的函数，它们被弄得愈来愈不象那些能解决问题的真正函数。"

埃尔米特在他的一封信中表达的心情更为典型，他写道："我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶。"

幸运的是，这些出自名家的反对意见并未能够阻止数学中新事物的成长；而是随着二十世纪以来数学的巨大进展这种错误观点本身被人们抛弃。事实上，正是对函数的精确研究导致了数学的一个新分支——实变函数论的产生。另外，概率论的近代发展也显示了维尔斯特拉斯函数与这一学科的一个应用性很强的分支——随机过程论的重要联系：布朗运动过程几乎所有的样本轨道都是无处可微连续函数。有关这方面的讨论读者可参看〔66〕。

参考文献

〔1〕Alsina, J. The Peano Curve of Schoenberg is nowhere differentiable, J. of Approximation Theory, 33 (1981), 28 –42.

〔2〕Ampere. Recherches sur quelques points de la theorie des fonctions derivees, qui conduisent, etc. Ecole Polytechnique, Bd. 6, Cah. 13. (1806).

〔3〕Auerbach, H. und Banach, S. über die Höldersche Bedingung, Studia Math. 3(1931), 180~184.

〔4〕Banach, S. über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3 (1931), 174—179.

〔5〕Behrend, F. A. Some remarks on construction of continuous non-differentiable functions, Proc. London Math. Soc. (2), 50 (1949), 463—481.

〔6〕Besicovitch, A. S. Discussion der stetigen Funktionen im Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit, Bull. de l'Acad. des Sciences de Russie,

Vol. 19, (1925), 527—540.

〔7〕 Billingsley, P. van der Waerden's continuous nowhere differentiable function, Amer. Math. Monthly, 89 (1982), 691.

〔8〕 Blank, A. A. A simple example of a Weierstrass function, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 515—519.

〔9〕 Boas, R. P. A Primer of Real Functions, Carus Mathematical Monograph No. 13, MAA, 1960.

〔10〕 Bromwith, T. J. I'a. Introduction to the Theory of Infinite Series, London, 1908.

〔11〕 Bruckner, A. M. and Leonard, J. L. Derivatives, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), Part, 24—56.

〔12〕 Bush, K. A. Continuous functions without derivatives, Amer. Math. Monthly, 59 (1952), 222—225.

〔13〕 Bush, K. A. Locally recurrent function, Amer. Math. Monthly, 69 (1962), 199—206.

〔14〕 Bush, K. A. Pathological functions, crinkly and wild, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), 559—562.

〔15〕 Cater, F. S. On van der Waerden's nowhere differentiable function, Amer. Math. Monthly, 91 (1984), 307—308.

〔16〕 Dini, U. & Lüroth-Schepp, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen reellen Grösse, Leipzig, (1892).

〔17〕 Gelbaum, B. and Olmsted, J. Counterexamples in Analysis, Holden-day, San Francisco, 1964.

〔18〕 Hardy, G. H. Weierstrass' non-differentiable function, Trans. American Math. Soc., Vol. 17, (1916), 301—325.

〔19〕 Hardy, G. H. & Littlewood, J. E. A further note on the converse of Abel's Theorem, Proc. Lond. Math. Soc. (2), Vol. 25, (1926), 219—236.

〔20〕 Hewitt, E. and Stromberg, K. Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, New York, 1978.

〔21〕 Hobson, E. Theory of Functions of a Real Variable, Vol. 2, Dover, 1957.

〔22〕 Klambauer, G. Mathematical Analysis, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.

〔23〕 Kowalewski, G. Bolzanos Verfahren zur Herstellung einer nirgends differentiierbaren stetigen Funktion, Berichte Ges. Wiss., Leipzig. Vol. 74. (1922), 91—95.

〔24〕 Kowalewski, G. Ueber Bolzanos Nichtdifferenzierbare stetige Funktion, Acta Ma-

th., Vol. (1923), 315—319.

〔25〕 Lerch, M. Ueber die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Funktionen, Journ. fur Math., Vol. 103, (1888), 126—138.

〔26〕 Liu Wen, A space filling curve, Amer. Math. Monthly, 90 (1983), 283.

〔27〕 Liu Wen, The construction of a class of pathological functions. J. of Math. 6 (1986), No. 2, 221—228.

〔28〕 Marcus, S. On locally recurrent functions, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 822—826.

〔29〕 Marcus, S. On locally recurrent functions Ⅰ, Rev. Math. Pures Appl. 11 (1966), 911—914.

〔30〕 Mauldon, J. G. Locally recurrent functions, Amer. Math. Monthly, 69 (1962), 896—899.

〔31〕 Mauldon, J. G. The differentiability of locally recurrent functions, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 983—985.

〔32〕 Mazurkiewicz, S. Sur les fonctions non-derivables, Studia Math., 3 (1931) 92—94.

〔33〕 Mazurkiewicz, S. Sur les nombres derives, Fund. Math., 23 (1934) 9—10.

〔34〕 Miloslav, J. Sur Certaines classes de fonctions continues, Casopis Pest. Math.,

83 (1958), 83—90. (cf. Math. Rev. 20 (1959), 1736, 284)

〔35〕 Morse, A. P. A Continuous function with no unilateral derivative, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 496—507.

〔36〕 Morse, A. P. Dini derivatives of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 126—130.

〔37〕 Pepper, E. D. On continuous functions without a derivative, Fundamenta Math., Vol. 12, (1928), 244—253.

〔38〕 Porter, M. B. Derivateless continuous functions, Bull. Amer. Math Soc., Vol. 25, (1919), 176—180.

〔39〕 Rychlik, K. Ueber eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichen Nachlasse, Sitzungsber. der k. Bohm. Ges. der Wiss., (1921—22).

〔40〕 Saks, S. On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, Fund. Math., 19 (1932) 211—219.

〔41〕 Singh, A. N. On Bolzano's non-differentiable function, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences et des Letter, (1928), 191—220.

〔42〕 Singh, A. N. On the derivates of non-differentiable functions, Proc. Benares

Math. Soc., Vol. 11 (1929), 9—10.

〔43〕 Singh, A. N. Some remarks concerning a result of Besicovitch, Bull. Cal. Math. Soc., Vol. 20, (1928—29), 239—244.

〔44〕 Singh, A. N. The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions, Lucknow University Studies, No. 1, Faculty of Science, Lucknow University, 1935; (republished by Chelsea, New York, in Squaring the Circle and Other Monographs).

〔45〕 Singh, A. N. On functions without one-sided derivatives, Proc. Ben. Math.Soc. (N. S.) 3 (1941), 58—69.

〔46〕 Singh, A. N. On the functions without one-sided derivatives Ⅱ, Proc. Ben. Math. Soc. (N. S.) 4 (1943), 95—108.

〔47〕 Swift, W. C. Simple constructions of non-differentiable functions and space-filling carves, Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 653—655.

〔48〕 Young, G. On the derivates of a function, Proc. London Math.Soc., (2) 15(1916), 360—384.

〔49〕 刘文, Auerbach与 Banach的一个定理的推广, 数学学报,23(1980), 801—807. Math. Rev. 82f; 26009.

〔50〕 刘文，一类连续函数，科学通报,22(1977)，392—395.Math. Rev. 58* 6099.

〔51〕 刘文，一类连续函数Ⅰ，科学通报，25(1980)，340—343 Math. Rev. 82 h: 26007a. Math. Abst. 501. 26002.

〔52〕 刘文，一类连续函数Ⅱ，科学通报，25(1980)，967—969. Math. Rev. 82h: 26007b. Math. Abst. 501. 26003.

〔53〕 刘文，一类局部循环函数，科学通报,24(1979)，1—4. Math. Rev. 80c: 26003. Math. Abst. 449. 26007.

〔54〕 刘文,一类局部循环函数Ⅰ,科学通报,26(1981)，526.

〔55〕 刘文，关于局部循环函数，数学杂志，2(1982)，№. 2，142—144.

〔56〕 刘文，局部周期函数，自然杂志，3(1980),391.

〔57〕 刘文，一类连续函数的构造,数学汇刊,5(1984)，№. 1，16—23.

〔58〕 刘文，一个无处可微的连续函数，高等数学，1986，№. 4.

〔59〕 刘文，关于无处可微的连续函数，河北工学院学报，1986,№. 2.

〔60〕 刘胜，一个处处连续处处不可导的函数，内蒙古大学学报（自然科学版），13(1982),№.2，205—208.

〔61〕 廖爱军，关于无处可微连续函数，中国科技大学学报，数学专辑，1983,164—165.

〔62〕辛钦，连分数（中译本，刘诗俊等译），上海科学技术出版社，1965。

〔63〕陈建功，实函数论，科学出版社，1958。

〔64〕菲赫金哥尔茨，微积分学教程（中译本一卷一分册，叶彦谦等译），人民教育出版社，1959。

〔65〕捷米多维奇，数学分析习题集（中译本，李荣冻译），人民教育出版社，1958。

〔66〕弗里德曼，随机微分方程及其应用（中译本，吴让泉译），科学出版社，1983。

〔67〕黎茨等，泛函分析讲义（中译本第一卷，梁文骐译），科学出版社，1963。

人 名 索 引

凡德瓦尔登	van der Waerden
贝西科维茨	Besicovitch, A. S.
牛顿	Newton, I. (1642—1727)
巴拿哈	Banach, S. (1892—1945)
达布	Darboux, G.
皮亚诺	Peano, G. (1858—1932)
布什	Bush, K. A.
布朗	Brown, R.
布朗维茨	Bromwith, T. J.
毕内梅	Bienaime, M.
约当	Jordan, C. (1838—1922)
安培	Ampere
当若阿	Denjoy, A.
米洛斯拉夫	Miloslav, J.
列维	Levy, B.
李普希兹	Lipschitz, R.
杜布瓦-雷蒙	de Bois-Reymond
庞加莱	Poincare, H. (1854—1912)
里赤立克	Rychlik, K.
狄尼	Dini, V.
狄里克雷	Dirichlet, L. (1805—1859)
沙克斯	Saks, S.
克洛普	Knopp, K.
辛恩	Singh, A. N.

波尔察诺	Bolzano, B. (1781—1848)
波特	Porter, M. B.
杨格	Young, G.
哈代	Hardy, G. H. (1877—1947)
柯瓦列夫斯基	Kowolewsky, G.
柯西	Cauchy, A.L. (1789—1857)
莱布尼兹	Leibniz, G. W. (1646—1716)
埃尔米特	Hermite, C.
费伯	Faber, G.
勒茨	Lerch, M.
高斯	Gauss, C. F. (1777—1855)
维尔斯特拉斯	Weierstrass, K. (1815—1897)
康托	Cantor, G. (1845—1918)
培帕	Pepper, E. D.
奥巴哈	Auerbach, H.
斯托兹	Stolz, O.
斯威夫特	Swift, W. C.
塞利尔	Cellerier, C.
摩尔斯	Morse, A. P.
黎曼	Riemann, B. (1826—1866)